Rétrospectives . . .

EVOLUTION DU CONCEPT DE DERIVEE

par: Jean-Paul Collette
Cegep Montmorency

Introduction historique

Le calcul différentiel et intégral repose sur deux concepts fondamentaux: le concept de dérivée et le concept d'intégral. On aborde généralement aujourd'hui l'étude du calcul différentiel et intégral par le concept de limite qui débouche lui-même sur la limite particulière qu'est la dérivée pour enfin ouvrir la voie au calcul intégral considéré plus difficile que l'étude de la différentiation des fonctions.

D'un point de vue historique, l'intégration des fonctions à titre d'algorithme prend son origine chez les Grecs dans leur méthode d'"exhaustion". Par ailleurs, le concept de dérivée sous-jacent à la différentiation apparaît beaucoup plus tard dans l'histoire des mathématiques. Cependant la distinction faite entre ces deux concepts a été pleinement réalisée au moment où le processus de différentiation (calcul de la dérivée) est perçu comme le processus inverse de l'intégration (calcul de l'intégral). Il faudra attendre au XVII^e siècle pour voir apparaître les premières règles de différentiation avec lesquelles Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried W ilhem Leibniz (1646-1716) inventeront indépendamment un véritable calcul différentiel opérationnel muni de règles universelles et d'un symbolisme suffisant pour les besoins de l'époque.

Si l'on peut parler d'Eudoxe (vers 370 av. J.-C.) comme l'inventeur d'un procédé d'intégration fonctionnel (il inventa la méthode d'"exhaustion"), l'inventeur d'un bon procédé de différentiation doit, par contre, être recherché parmi les mathématiciens du XVII^e siècle.

En effet, les mathématiques grecques et plus précisément la géométrie furent surtout concernées avec la forme plutôt qu'avec la variation. Euclide définit la tangente comme une ligne touchant le cercle en un seul point (cette définition sera étendue à d'autres courbes par la suite). Cette définition ne peut suggérer une méthode, ni un procédé pour tracer les tangentes. Malgré tout, Archimède parvient à construire la tangente à la spirale arithmétique[1] mais il ne semble pas se préoccuper de développer davantage sa méthode pour lui permettre de tracer les tangentes à d'autres courbes. Ainsi, l'idée de différentiation exprimée d'un point de vue géométrique par la pente de la tangente à une courbe n'est pas entièrement étrangère aux travaux d'Archimède mais les quelques considérations du savant grec ne peuvent en aucun cas mériter l'appellation d'"inventeur d'un procédé de différentiation".

L'étude intuitive de la pente de la tangente à une courbe englobe de nombreux éléments à la fois géométriques et dynamiques. Pour un, la "variation" joue un rôle capital dans l'évolution des conceptions mathématiques qui ont conduit à l'avènement du calcul différentiel.

Si les mathématiques grecques comme la physique grecque furent essentiellement statiques, l'étude de la variation, du changement dynamique devait se faire suivant une dialectique axée essentiellement sur l'aspect qualitatif des phénomènes. Cependant au 14^{e} siècle, les écrits d'Aristote circulent dans les universités et les nombreux sujets contenus dans ses traités deviennent le centre de discussions philosophiques. En particulier les vues qualitatives d'Aristote sur le changement, la variation, font naître des questions parmi les philosophes scholastiques: si la température d'un corps varie, quelle est la quantité de chaleur contenue dans le corps? Si un objet se meut avec une vitesse variable, quelle distance parcourra-t-il en un temps donné? Les philosophes du Moyen-Age ont étudié la variation à la lumière de la philosophie d'Aristote mais en y ajoutant cependant un aspect nouveau, la quantification des "formes" variables (phénomènes).

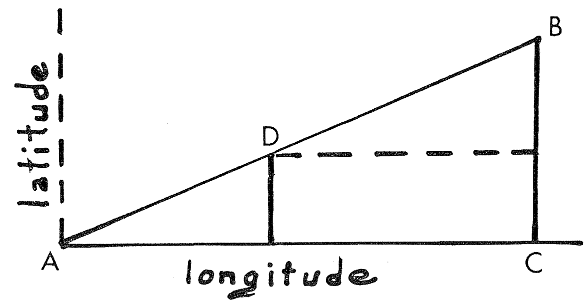
Le terme "forme" est employé au Moyen-Age et réfère en général à toute qualité qui admet une variation et qui renferme l'idée intuitive d'intensité. En général, la "latitude" de forme correspond au degré pour lequel la forme possède une certaine qualité. On discute sur les changements par lesquels cette qualité est acquise ou perdue. On parle de taux de changements de la latitude de forme non seulement en rapport avec la distance physique mais avec d'autres formes telles que l'intensité lumineuse, la chaleur, la densité, etc.. Les taux de changements y sont étudiés en les classifiant selon qu'ils sont uniformes ou non uniformes et on distingue davantage ces taux selon que le taux instantané de variation est uniforme ou pas, etc..

---

(1) Spirale mathématique: courbe tracée par un point en mouvement uniforme sur une ligne, laquelle tourne uniformément autour d'un point fixe.

Cette étude quantitative de la "forme" représente le premier pas dans le but de rendre quantitative l'idée de variation. Un deuxième pas est franchi au moment où Nicole Oresme (1323-1382) a l'idée de représenter graphiquement la variation des phénomènes. Ses prédécesseurs ont élaboré de longues discussions verbales sans référence à un symbolisme algébrique ni même à des références géométriques quelconques, tels que diagramme, graphique. Oresme, évêque de Lisieux, utilise des représentations graphiques dans le but d'exprimer la variation des phénomènes à l'aide de figures géométriques.

Dans son traité "Tractatus de latitudinibus formarum" (1361), Oresme représente la variation en ayant recours aux coordonnées. En étudiant la distance parcourue par un mobile dont la vitesse est variable, il associe la variation du temps t aux différents points sur une droite horizontale (longitude) et la variation correspondante de la vitesse aux différents points sur une droite verticale (latitude). En joignant les points A et B, il obtient de fait le graphique de la fonction vitesse. Cette représentation graphique lui permet de déduire l'aire sous la droite AB qui sera la distance parcourue par le mobile durant le temps correspondant à AC. Il réussit même à inférer que la distance parcourue par le mobile est la même que celle parcourue par un autre mobile dont la vitesse est DE (constante) partout sur AC. Dans cet exemple, le taux de variation de la vitesse est constant (AB est une droite); par conséquent, il classifie ce type de variation comme étant "latitudo uniformiter difformis", c'est-à-dire taux de changement uniforme (constant) d'un taux de changement non uniforme (variable).



La contribution d'Oresme concernant la latitude de formes marque un pas en avant vers le développement du calcul différentiel et intégral car ce fut l'étude de problèmes géométriques et la tentation de les exprimer en termes algébriques qui suggéra les concepts de dérivée et d'intégral. Malgré le fait que dans les écrits d'Oresme on retrouve des idées apparentées avec le triangle différentiel (étudié entre autres par Pascal et Leibniz), les philosophes du monde médiéval n'entrevoient aucun équivalent même rudimentaire à la différentiation des fonctions. Le mérite de l'Evêque de Lisieux repose essentiellement dans sa représentation graphique de la variation et les interprétations numériques qu'il a su en tirer.

Au début du XVII^e siècle, nous assistons à une renaissance des mathématiques qui se caractérise par un mélange d'idées anciennes (Archimède) associées aux prolongements des travaux du monde médiéval. En même temps, la science moderne prend son élan vital avec les travaux de Galiléo Galilée (1564-1643).

La base mathématique nécessaire pour établir les procédés propres au calcul différentiel et intégral fut supléée par les traités d'Archimède. L'ingénieur Simon Stevin (1548-1620), les italiens Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Luca Valerio (1552-1618), l'astronome allemand Johanne Képler (1571-1630), pour ne nommer que les principaux, vont remplacer les arguments d'Archimède par de nouvelles méthodes équivalentes aux anciennes et qui seront appliquées à des problèmes anciens et à d'autres n'apparaissant pas chez les Grecs. De plus, ces nouvelles méthodes dont l'élément de base est l'infinitésimal étudié durant le Moyen-Age correspondent à des algorithmes plus simples et plus faciles que ne l'était la méthode d'exhaustion.

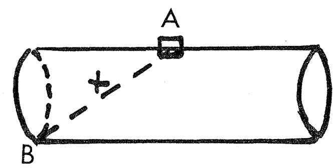
Mentionnons le traité de Cavalieri sur les "indivisibles" (1635) dans lequel l'auteur expose sa méthode infinitésimale en considérant les grandeurs géométriques comme composées d'éléments indivisibles obtenus par décomposition continue en tranches parallèles. Cette méthode, malgré son caractère strictement géométrique, exerça une influence considérable sur son époque et a servi de procédé d'intégration pendant près d'un demi-siècle.

L'évolution du calcul différentiel se fait parallèlement avec celle du calcul intégral mais débute très tard comparativement à ce dernier. Les principaux concepts qui vont permettre d'inventer un calcul différentiel sont nombreux et diversifiés. Cependant, certains occupent une place plus importante que d'autres et de ce fait méritent qu'on s'y attache davantage au détriment de ces derniers.

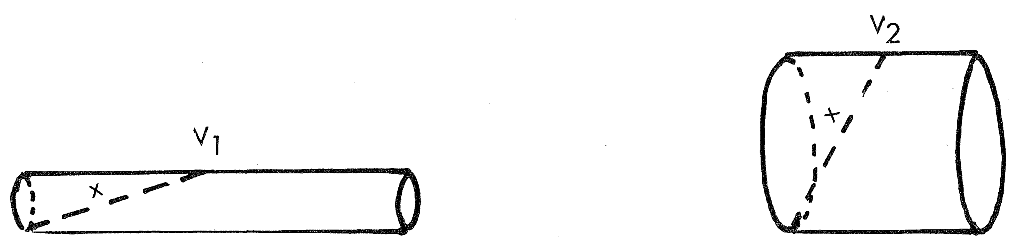
Le problème des maxima et des minima, pour un, apparaît dans les écrits de Nicole Oresme sous la forme suivante: il remarqua que le taux de variation d'une intensité (forme) est le plus petit au point correspondant au maximum d'intensité. Cette première constatation ne doit pas évidemment être confondue avec le résultat bien connu que la dérivée d'une fonction s'annule au point maximum de la fonction. Cependant, il est intéressant de noter cette remarque puisqu'elle indique déjà un résultat que d'autres mathématiciens vont développer et enrichir.

Képler publia en 1615 un livre, "Nova stereometria doleorum" traitant de la détermination du volume de certains solides générés par la révolution de courbes autour d'une corde, d'une tangente ou même d'une droite extérieure. Il ajouta ainsi quatre-vingt-dix (90) nouveaux solides à ceux déjà proposés par Archimède. Dans le deuxième chapitre de ce livre, il traite du problème de la détermination du volume de tonneaux de vin; problème occasionné par l'étrangeté des résultats obtenus par la méthode utilisée à l'époque pour mesurer le volume de vin contenu dans les tonneaux.

Le marchand utilise une règle introduite en A et qui touche au couvercle en B. La longueur AB = x indique le prix du contenu.



Le célèbre astronome remarqua l'inexactitude de cette forme de mesure à cause du fait qu'un tonneau plus étroit et de hauteur plus grande pouvait avoir la même mesure x qu'un autre dont le volume est plus considérable.



$$V_1 < V_2 \quad \text{et} \quad x_{V_1} = x_{V_2}$$

Il exprime x par la relation suivante:
$x^2 = (\frac{h}{2})^2 + d^2$ où h est la longueur et d le diamètre du tonneau.
Puis il approxime le volume V par la formule $V = \Pi r^2 h$ (volume du cylindre), d'où $V = \frac{\Pi x^2 h}{4} - \frac{\Pi}{16} h^3$. Il trouve en utilisant la méthode des infinitésimaux que le volume est maximum lorsque $h = \frac{2}{\sqrt{3}} x$ ou $3h^2 = 4x^2$. De fait, il observa que l'utilisation de x pour calculer le prix du vin était acceptable lorsque les tonneaux avaient la forme des tonneaux australiens (les tonneaux australiens vérifient la relation $3h^2 = 4x^2$ à une bonne approximation près). Il montra aussi que près du maximum le volume change très lentement.

La recherche de la détermination du volume de tonneaux de vin fut poursuivie par de nombreux mathématiciens et donna naissance à des méthodes très précises pour mesurer le volume de ces tonneaux. En ce qui a trait au problème des maxima et des minima, Fermat développera quelques années après une méthode sensiblement identique à celle que nous utilisons aujourd'hui.

Le concept de tangente à une courbe, hérité des anciens, occupe aussi une place de choix dans l'évolution du calcul différentiel. Au début du XVII^e siècle on retrouve trois points de vue distincts au sujet du concept de tangente:

a) la tangente est une sécante dont deux de ses points interceptant une courbe coincident;

b) la tangente est le prolongement du côté d'un polygone inscrit ayant un nombre infini de côtés;

c) la tangente est la direction d'une courbe en tout instant.

Le point de vue exprimé en a) ne fut pas accepté facilement et de nombreux mathématiciens tentèrent des approches différentes en prenant pour acquis un point de vue respectant davantage celui figurant en b) ou en c).

Pierre de Fermat (1601-1665) avocat par profession, mathématicien par goût, contribua largement à l'évolution des mathématiques dans des domaines aussi variés que la théorie des nombres, la géométrie analytique, le calcul différentiel et intégral. Vers 1629, Fermat, en utilisant les procédés algébriques de François Viète (1540-1603) expose sa méthode des maxima et des minima dont il présente l'analyse avec une clarté qui le caractérise.

On peut énoncer sa méthode des maxima de la façon suivante: soit à chercher le maximum ou le minimum de la fonction f dont la variable est A (Fermat suit Viète en utilisant les voyelles pour les variables et les consonnes pour le cas des constantes); remplaçons A par A + E (où E joue le rôle de notre Δx usuel) dans f et posons que $f(A + E) \approx f(A)$ (approximativement égal) puis divisons chaque terme par E et enfin éliminons tous les termes contenant E. L'équation résultante s'annulle pour une ou plusieurs valeurs de la variable A, ces valeurs correspondent à un maximum ou un minimum.

Le premier exemple auquel il applique sa méthode consiste à diviser un nombre en deux parties de telle manière que le produit soit maximum. Posons N le nombre connu et A la quantité inconnue, nous aurons

$$\begin{aligned} f(A) &= A(N - A) \\ &= AN - A^2 \end{aligned}$$

il faut rendre f maximum, par conséquent

$$\begin{aligned} f(A + E) &= (A + E)(N - (A + E)) \\ &= AN - A^2 + EN - 2AE - E^2 \end{aligned}$$

et $f(A) = A(N - A)$

d'où $$AN - A^2 = AN - A^2 + EN - 2AE - E^2$$

et en divisant par E nous obtenons

$$2A - N - E = 0$$

enfin posons $E = 0$ dans la dernière égalité, nous obtenons

$$2A = N .$$

f est maximum quand $A = \frac{N}{2}$.

Il est important de noter que sa méthode revient à évaluer $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$, mais cette limite ne suffit pas à déterminer si la ou les valeurs de A trouvées correspondent à un maximum ou à un minimum. En d'autres termes, Fermat savait que sa méthode permettait de trouver un maximum ou un minimum, mais ne distinguait pas entre un maximum et un minimum. Sachant que la méthode expose une condition nécessaire, Fermat va s'efforcer, tout au moins dans un exemple, de montrer qu'il y a maximum ou un minimum suivant le signe de E^2 dans le développement de $\frac{f(A + E) - f(A)}{E}$ c'est-à-dire avant d'éliminer E.

Dans un écrit de Fermat destiné à Descartes en juin 1638, le célèbre habitant de Toulouse explique comment sa méthode "de maximis et minimis" peut être appliquée à l'"invention" des tangentes. Fermat adopte le point de vue suivant au sujet de la tangente: "aucune droite ne peut tomber entre la courbe et la touchante" ce qui revient à dire que toute autre droite issue du point de tangence traverse nécessairement la courbe alors que la touchante (tangente) ne la traverse pas. Après avoir utilisé sa méthode à la recherche des normales à une courbe, il l'utilise directement à la recherche des tangentes ou plus précisément à la détermination des sous-tangentes(2).

Nous examinerons la méthode que Fermat a utiliséeau début de ses travaux pour la détermination des tangentes et nous laissons de côté des extensions intéressantes qu'il a apportées après 1638 et qui consistent à assimiler l'arc de courbe au segment de tangente. Ces extensions permettent entre autres de trouver la tangente d'un grand nombre de courbes, algébriques ou transcendantes.

---

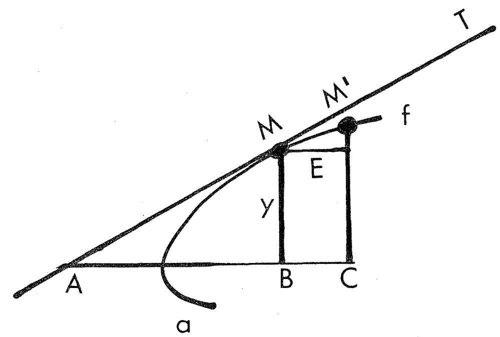
(2) sous-tangente: segment de l'axe horizontal compris entre le pied de l'ordonnée du point de tangence et l'intersection de la tangente avec cet axe horizontal.

Si $M(x,y)$ est un point sur la courbe de F à partir duquel on veut tracer la tangente et $M'(x + E,\ f(x + E))$ un point voisin de M alors M et M' sont approximativement à la même position sur la tangente et sur la courbe.

si a est la sous-tangente (AB) par triangles semblables on obtient

$$\frac{y}{a} = \frac{f(x + E)}{a + E} \quad \text{où } y = f(x)$$

$$\text{et } f(x + E) = y\left(1 + \frac{E}{a}\right)$$



il suffit alors de faire le produit des extrêmes et des moyens, éliminer les termes semblables, puis diviser par E. Enfin, en isolant a, on obtient après avoir éliminé E une relation qui permet de trouver la sous-tangente a. Appliquons cette méthode au "folium de Descartes"

$x^3 + y^3 = c\,x\,y$ où y est une fonction implicite de x de la forme $f(x,y) = 0$

x devient $x + E$ et y devient $y\left(1 + \frac{E}{a}\right)$, d'où

$$(x + E)^3 + y^3\left(1 + \frac{E}{a}\right)^3 - cy(x + E)\left(1 + \frac{E}{a}\right) = 0 \qquad f\left(x + E,\ y\left(1 + \frac{E}{a}\right)\right) = 0$$

puis $f\left(x + E,\ y\left(1 + \frac{E}{a}\right)\right) = f(x,y) = 0$ d'où

$$E\left(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{cxy}{a} - cy\right) + E^2\left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{cy}{a}\right) + E^3\left(1 + \frac{y}{a^2}\right) = 0$$

en divisant par E on a

$$3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{cxy}{a} - cy + E\left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{cy}{a}\right) + E^2\left(1 + \frac{y}{a^2}\right) = 0$$

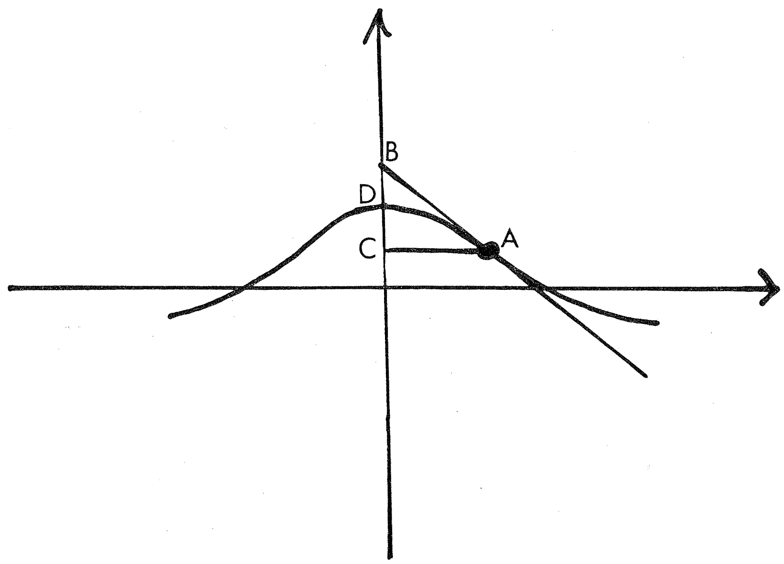
il suffit alors d'éliminer E et d'isoler a

$$3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{cxy}{a} - cy = 0$$

et

$$a = \frac{3y^3 - cxy}{cy - 3x^2}$$

Cette méthode a permis à Fermat de trouver la tangente à l'ellipse, la cycloïde, la cissoïde, la quadratrice. Mentionnons en terminant quelques remarques au sujet des points d'inflexion. Vers 1640, Fermat expose nettement comment on peut trouver les points d'inflexions d'une courbe où la concavité change de sens (il fut amené à étudier ce problème à partir d'une correspondance avec Roberval au sujet de la conchoïde de Nicomède).



Pour trouver le point A où débute le changement de concavité, il suffit de déterminer la tangente en un point quelconque de la courbe puis par la méthode des maxima et des minima, on déterminera le point A en menant la perpendiculaire AC et la tangente AB tel que la rapport $\frac{AC}{AB}$ soit minimum. Ainsi, Fermat montre qu'il a saisi la notion de pente de la tangente à la courbe.

Les travaux de Fermat en ce qui a trait au problème des maxima et des minima correspondent dans une large mesure (exception faite de l'absence d'un algorithme pour distinguer entre un maximum et un minimum) à notre méthode moderne. La comparaison de $f(x+E)$ et $f(x)$ et l'élimination de E après la division par E est l'équivalent (au niveau de l'algorithme) de

$$\frac{df}{dx} = \lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} .$$

Ses travaux sur la tangente à la courbe révèlent qu'il a saisi le concept de la pente de la tangente et se préoccupe du changement de concavité dans certaines courbes.

(suite au prochain Bulletin)