Rétrospectives . . .

Rédacteur : Jean-Paul Collette, Université du Québec à Montréal

Le concept de continuité a ses origines dans la mathématique grecque. Aristote dans sa " Physique " expose ses vues sur la continuité. Pour lui les choses qui se touchent les unes aux autres sont celles dont les limites extrêmes ont la même position: les choses continues sont celles dont les limites extrêmes sont une (unies); les choses successives sont celles entre lesquelles il y a ce qu'elles ne sont pas. De plus les choses

continues sont celles dont leurs unions deviennent en nature (en essence). Les choses continues doivent nécessairement se toucher. Selon Aristote les choses continues sont toujours divisibles en parties qui sont continues.

La continuité chez Aristote doit être perçue par les sens; c'est une continuité physique dans laquelle ses éléments constitutifs sont liés intimement. On peut identifier cette sorte de continuité au tracé d'un crayon entre deux extrémités sans le lever.

Thomas d'Aquin reprend les idées d'Aristote et parle d'une continuité linéaire. Elle est conçue comme étant divisible (en puissance) à l'infini puisqu'en pratique la division ne peut être prolongée jusqu'à l'infini.

De plus, il n'existe aucune longueur minimale. Le point n'est pas une partie constituante de la ligne puisqu'il ne possède pas la propriété de divisibilité à l'infini. Par conséquent, la continuité ne peut provenir des points. Cependant un point en mouvement possède la capacité de générer une ligne.

Suivant l'opinion de Florian Cajori il faudra attendre au XIX^{e} siècle avant de posséder une compréhension de la continuité supérieure à celle de St-Thomas.

Roger Bacon (1214 - 1294) manifeste son opposition contre la composition d'une ligne continue en parties indivisibles. Les idées de Roger Bacon seront répandues par Duns Scot (1265 - 1308) l'adversaire de Thomas d'Aquin en ce qui a trait à la théologie et la philosophie.

La conception moderne et rigoureuse de la continuité nous la devons à Georg Cantor et à Richard Dedekind. Il faut aussi mentionner la contribution importante de Karl Weierstrass qui a banni de l'Analyse la notion d'infinitésimal prise comme "constante plus petite que tout nombre donné".

Malgré le retentissant succès du calcul différentiel et intégral dans les mains de Newton, Leibniz, Euler, les Bernouilli et bien d'autres de nombreuses critiques furent soulevées contre les bases logiques du calcul. Ces critiques débutèrent avec l'"Analyst" de George Berkeley publié dès 1734, suivi de Bernard Nieuwentijt qui s'objecte aux différentielles d'ordre supérieur et de Michel Rolle qui fut le premier a prétendre que le calcul différentiel et intégral du temps conduisait à des paradoxes. Malheureusement, dans les mains de Jean Bernouilli et de Léonhard Euler les procédés algorithmiques, sans fondements logiques, connaissent des résultats inespérés. Cependant, vers 1772 Joseph Louis Lagrange tente d'expliquer différemment le concept de dérivée à l'aide de séries de puissance. Sa tentative fut vouée à un échec presque complet.

Augustin Louis-Cauchy et Bernhard Bolzano fournissent indépendamment, au début du XIX^e siècle, (vers 1821) une définition convenable de la continuité d'une fonction. Ils définissent la continuité de f dans un intervalle si pour toute valeur de x dans cet intervalle la différence $f(x + \Delta x) - f(x)$ devient et demeure plus petite que tout nombre donné en autant que la variation de x (Δx) soit suffisamment petite.

Cette définition ressemble beaucoup à la définition que nous utilisons actuellement. Cependant, l'ambiguité de certaines expressions comme " suffisamment petite " " devient et demeure " doivent être éliminées pour être remplacées par des expressions beaucoup plus rigoureuses. Au milieu du XIX^e siècle nous assistons entre autres à des recherches centrées sur les concepts de " nombre " et d' "ensemble " qui vont permettre d'établir rigoureusement une conception du nombre et une compréhension de la continuité qui dépassent nettement l'intuition physique et cela avec les contributions majeures de Dedekind et de Cantor.

Dedekind trouve vers 1858 l'essence de la continuité de la ligne droite dans l'énoncé du principe suivant: "Si tous les points d'une ligne droite sont placés dans deux classes telles que chaque point de la première classe se trouve à gauche de tout point de la deuxième classe alors il existe un et un seul point qui produit cette division de tous les points en deux classes". Ce principe est aussi appelé la "coupure" de Dedekind. Dedekind a été conduit à ce principe en étudiant les éléments du calcul différentiel. Considérant l'adage que le " calcul différentiel traite des grandeurs continues " comme très incertain puisque l'explication de la continuité n'est nulle part évidente, il décida de découvrir sa véritable origine et de fournir une définition véritable partant sur l'essence de la continuité.

Ce type de continuité porte le nom de " continuité arithmétique " en opposition avec la vieille conception de la continuité physique. Cette continuité se caractérise par une collection d'éléments, disposés en ordre, infini en nombres, mais indépendant l'un par rapport à l'autre. Ce concept est abstrait, et transcende toute imagination qui chercherait à le rendre physique.

La propriété de divisibilité à l'infini appartient encore à la continuité arithmétique mais ne suffit pas à l'identifier. Il faut encore lui adjoindre une autre propriété qu'on désigne souvent par l'expression " ensemble de points qui est parfait ". En d'autres termes toute partie d'un ensemble de points (comme des segments sur une ligne droite) possède une limite contenue dans l'ensemble de points. Par exemple, la droite des nombres rationnels n'est pas continue alors que la droite des nombres réels possède la continuité arithmétique.

Le dernier élément discordant dans la vieille conception de la continuité fut banni par Cantor et Weierstrass. En effet, le rejet complet de tous les infinitésimaux c'est-à-dire les quantités qui n'obéissent pas au postulat d'Archimède (1), vient compléter la conception de la continuité telle que généralement admise aujourd'hui.

(1) Si a et b sont deux nombres différents de zéro tels que $a < b$ alors il est toujours possible de trouver un nombre entier m tel que $m\,a > b$ (postulat d'Archimède).