SOLUTIONS

CONCOURS DE L'A. M. Q. (niveau C.E.G.E.P.)

1. Soient x, y, z les bases respectivement utilisées par les trois vassaux. On a alors

$$4x^2 = y^2 + 2y + 1 = 2z^2 + 2$$

Donc $4x^2 = (y+1)^2$, ou $x = \frac{y+1}{2}$; d'où y est impair.

Mais d'après les chiffres qui apparaissent dans ces nombres, $x \geq 5$, $y \geq 3$, $z \geq 3$. Ainsi $y = 3, 5, 7$ ou 9.

Si $y = 3$, $x = 2$ impossible; si $y = 5$, $x = 3$ impossible; si $y = 7$, $x = 4$ impossible. On en conclue que $y = 9$ et que $x = 5$; et alors $z = 7$.

Le nombre cherché est 100.

2. Il faut trouver les deux nombres suivants:

a) la probabilité, selon le maître, que la flèche ait été tirée par le maître, sachant que la flèche a atteint la cible;

b) la probabilité, selon l'élève, que la flèche ait été tirée par le maître, sachant que la flèche a atteint la cible.

Dans le premier cas, ce nombre sera

$$\frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10}} = \frac{63}{68} \cong 92.6\%$$

Dans le second, ce nombre sera

$$\frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{21}{42} \cong 50\%$$

3. Pour f impaire, montrons que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Mais $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-y)dy = \int_{a}^{0} f(y)dy$ en posant $x = -y$

et $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(y)dy$ en posant $x = y$.

Donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(y)dy = \int_{a}^{a} f(y)dy = 0$

Montrons de plus que si f est impaire, f^{2n+1} est encore impaire.

$$f^{2n+1}(x) = \underbrace{f(x)\ f(x)\ \ldots\ f(x)}_{2n+1 \text{ fois}} = \underbrace{(-f(-x))\ (-f(-x))\ \ldots\ (-f(-x))}_{2n+1 \text{ fois}}$$

$$= (-1)^{2n+1} f^{2n+1}(-x) = -f^{2n+1}(-x)$$

Donc f^{2n+1} est impaire,

et par suite:

$$0 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f^{3}(x)dx = \ldots = \int_{-a}^{a} f^{2n+1}(x)dx.$$

4. Pour

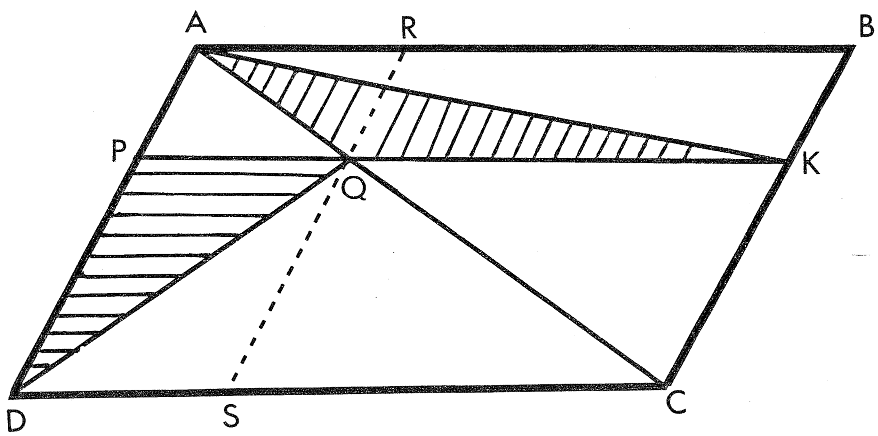
$$\begin{array}{lll}
n = 1 & \text{on a 1 région} & \\
 & & \} \; 2 \\
n = 2 & \text{on a 3 régions} & \\
 & & \} \; 4 \\
n = 3 & \text{on a 7 régions} & \\
 & & \} \; 6 \\
n = 4 & \text{on a 13 régions} & \\
 & & \} \; 8 \\
n = 5 & \text{on a 21 régions} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Si $f(n)$ désigne le nombre de régions déterminées par n carrés, on aura

$$f(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2\frac{(n-1)n}{2}$$

Donc $\underline{f(n) = 1 + n^2 - n}$.

5.



Traçons RQS $\parallel$ AD.

A montrer que Aire(PQD) = Aire(AQK)

ou Aire(PQD) + Aire(APQ) = Aire(AQK) + Aire(APQ)

c'est-à-dire Aire(ADQ) = Aire(APK).

Nous avons Aire(ADC) = Aire(ABC).

Mais Aire(SQC) = Aire(QKC) et Aire(APQ) = Aire(ARQ).

Donc Aire(DPQS) = Aire(QRBK)

ou $\frac{1}{2}$(Aire DPQS) = $\frac{1}{2}$Aire(QRBK).

Mais Aire(ADQ) = Aire(PQD) + Aire(APQ)

= $\frac{1}{2}$Aire(DPQS) + $\frac{1}{2}$Aire(ARQP)

= $\frac{1}{2}$Aire(QRBK) + $\frac{1}{2}$Aire(ARQP)

= $\frac{1}{2}$Aire(ABKP)

= Aire(APK)

6. Soit u_{i_1} le terme de la suite le plus près inférieurement de N.

Soit u_{i_2} le terme de la suite le plus près inférieurement de $N-u_{i_1}$

Soit u_{i_3} le terme de la suite le plus près inférieurement de $(N-u_{i_1}) - u_{i_2}$

etc.

Alors $N = u_{i_1} + u_{i_2} + u_{i_3} + \ldots..$

Les différences diminuant vers 0, cette somme devra se terminer

$$N = u_{i_1} + u_{i_2} + u_{i_3} + \ldots + u_{i_n} \qquad (1)$$

Montrons que $u_{n+1} < 2u_n$.

En effet $2u_n = u_n + u_n = u_n + u_{n-2} + u_{n-1}$

$= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = u_{n+1} + u_{n-2}$

Ainsi dans (1) les termes ne peuvent être égaux, étant donnée la façon même de faire notre choix.

Enfin, si deux termes de (1) sont consécutifs dans la suite, nous aurions $u_j + u_{j-1} = u_{j+1}$ et au lieu de choisir u_j, nous aurions pu prendre u_{j+1}, indiquant un mauvais choix de u_j.

Gagnants

1er prix (Bourse de $125.00 offerte par le Mouvement Desjardins)

GOLDSTEIN Norman Joseph — Vanier College

2e prix (Bourse de $125.00 offerte par la Sauvegarde, compagnie d'assurance-vie)

HAMEL Pierre — Edouard Montpetit

(Bourse de $50.00 offerte par l'A.M.Q.)

3^{o} ALFORD Douglas — Vanier College

4^o	LOMBARDI Michael	Vanier College
5^o	LASNIER Gilles	Maisonneuve
6^o	NADEAU Daniel	Séminaire de Québec.

M. Gilles Lasnier a accepté le prix offert par l'Université de Sherbrooke. Il s'agit d'une bourse couvrant les frais de scolarité de sa première année à la faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke ($475.00).