CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

La section française du Concours Mathématique du Québec a compté cette année 1593 participants (contre 1577 en 1971), dont 136 étudiants de la premièr[e] année de CEGEP et 1457 des écoles secondaires. Ces étudiants provenaient de 11[0] écoles et collèges répartis dans 78 centres d'examens.

Parmi les 1457 étudiants des écoles secondaires nous avons le plaisir de compter 10 membres du club de mathématiques que dirige Monsieur Jean-Marie Labri F.I.C., professeur à l'école normale de Rutovu, Burundi. C'est la première fois que des étrangers demandent de s'inscrire à notre concours. Un de ces étudiants Monsieur Fidèle Rurihose s'est mérité une mention honorable.

Vingt-huit des cinquante participants québécois à l'Olympiade Canadienne de Mathématiques ont été choisis parmi les gagnants de la section française de notre concours (contre 25 en 1971).

Pour vous permettre de juger de la difficulté du questionnaire 1972, nou[s] indiquons dans le tableau suivant le nombre de réponses parfaites pour chacune des sept questions.

	Ecoles secondaires	CEGEP
Question 1	128	13
Question 2	106	31
Question 3	2	1
Question 4	2	1
Question 5	8	4
Question 6	17	5
Question 7	0	0

Le but de notre concours est de faire ressortir et de mettre en valeur dans notre population étudiante nos plus grands talents en mathématiques. Il ne s'agit donc pas d'un examen qui permettrait de juger un professeur ou une institution d'enseignement. Au contraire, nous avons choisi à dessein des questions qui font appel à l'imagination créatrice et à l'intuition plutôt qu'à un bagage de connaissances académiques. De ce point de vue, les résultats du concours 1972 sont très encourageants, car ils ont révélé chez nos étudiants des talents nombreux et remarquables.

- -

Liste des prix et des bourses

PREMIER PRIX - $100.00

BOURASSA Richard - 12e année - Séminaire Ste-Marie - Shawinigan

DEUXIEME PRIX - $50.00

JETTE Yves - CEGEP de Maisonneuve - Montréal

TROISIEME PRIX - $50.00

BENOIT Alain - 12e année - Ecole secondaire Richard - Verdun

BOURSES D'ETUDES SUN LIFE - $150.00 CHACUNE

BOURASSA Richard
JETTE Yves

PRIX PROVINCIAUX ET REGIONAUX - $25.00 CHACUN

BEAULIEU Marielle	12e	Ecole secondaire St-Viateur	Beauharnois
BERGERON Robert	11e	Ecole secondaire St-Viateur	Montréal
BISSONNETTE Pierre	12e	Ecole secondaire St-Donat	Montréal
BOLDUC Michel	CEGEP	CEGEP Edouard-Montpetit	Longueuil
BORNAIS Richard	CEGEP	CEGEP de St-Laurent	St-Laurent
BRIERE René	12e	Polyvalente Arthur-Pigeon	Huntingdon
CHAMBERLAND René	12e	Ecole secondaire Champagnat	La Tuque
DESCARY Michèle	12e	Ecole secondaire Dandurand	Montréal
DESLANDES Rolland	12e	Séminaire de St-Hyacinthe	St-Hyacinthe

FOREST Hélène	12e	Polyvalente Jean-Nicolet	Nicolet
FOURNIER Pierre	12e	Ecole secondaire Albert-Carrier	Thetford-Mines
GENIN Sylvie	12e	Collège Regina Assumpta	Montréal
HURTUBISE Jacques	11e	Collège Jean-de-Brébeuf	Montréal
LALONDE Laurent	11e	Ecole secondaire St-Donat	Montréal
LANTHIER Richard	12e	Ecole secondaire Richard	Verdun
LEBLANC Daniel	CEGEP	CEGEP de Valleyfield	Valleyfield
LEGENDRE Ghislaine	12e	Polyvalente Beloeil	Beloeil
MARCOTTE Denis	CEGEP	CEGEP de Maisonneuve	Montréal
MERCURE Hélène	12e	Ecole secondaire J.-B.-Meilleur	Repentigny
MORAIS Louise	11e	Ecole secondaire Henri-Bourassa	Montréal
PARADIS Jacques	CEGEP	CEGEP de Maisonneuve	Montréal
SAVOIE Jean	CEGEP	CEGEP Edouard-Montpetit	Longueuil
ST-LOUIS Luc	11e	Ecole secondaire St-Donat	Montréal
TREMBLAY André	12e	Polyvalente Daniel-Johnson	Pointe-aux-Trembles
VILLENEUVE Louise	CEGEP	CEGEP de Rouyn	Rouyn

- -

*Solutions du dernier concours**

1. C'est la formule (a) qui rapportera davantage à Michel, comme le montre le tableau suivant. Les montants sont ceux que Michel touchera, selon chaque formule, une fois écoulée la période indiquée dans la colonne de gauche.

	(a)	(b)
6 mois	$2,500.00	$2,500.00
1 an	2,550.00	2,500.00
1 an et 6 mois	2,600.00	2,600.00
2 ans	2,650.00	2,600.00
2 ans et 6 mois	2,700.00	2,700.00
3 ans	2,750.00	2,700.00
En général, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$		
$n-1$ années et 6 mois	$\$(2,500. + 100(n-1))$	$\$(2,500. + 100(n-1))$
n années	$\$(2,500. + 100(n-1) + 50)$	$\$(2,500. + 100(n-1))$

---

* On peut trouver le questionnaire de ce concours dans le Bulletin A.M.Q. numéro 4.

Selon la formule (a), Michel touchera donc dans l'année n \$50.00 de plus que selon la formule (b)**; $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. La rivière a 1760 pieds de largeur. En effet, soit L la largeur de la rivière. Soient A et B les deux traversiers, A étant plus rapide que B. Pendant que A parcourt L-720 pieds, B en franchit 720. Ensuite, A parcourt

$$720 + (L-400) = L + 320$$

pieds et B n'en fait que

$$(L-720) + 400 = L - 320.$$

Comme les vitesses sont constantes, les distances parcourues dans un même temps sont dans un rapport constant. On a donc

$$\frac{L-720}{720} = \frac{L+320}{L-320} ,$$

une équation du second degré en L dont les racines sont $L = 0$ et $L = 1760$. Il faut écarter la racine $L = 0$ puisque, d'après l'énoncé, la rivière a au moins 720 pieds de largeur.

3. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les pièces de l'édifice. Soit N_i le nombre de portes de la pièce C_i donnant sur le jardin et M_i le nombre de portes de la pièce C_i donnant sur une autre pièce de l'édifice; $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors le nombre

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$$

est pair, puisque chaque porte commune à deux pièces y est comptée deux fois. De même la somme

$$S = (N_1 + M_1) + (N_2 + M_2) + \ldots + (N_n + M_n)$$

de nombres paires est paire. Donc le nombre

$$S - M = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$$

des portes s'ouvrant sur le jardin est pair, étant la différence de deux nombres pairs.

** Correction à faire sur le questionnaire: la formule (b), \$100.00 par année à compter de la première année.

4. Le temps minimum est de 1 heure et 45 minutes. Le forgeron peut ouvrir le dernier chaînon d'une section et le refermer sur le premier chaînon d'une autre section. Cette méthode permet de reconstituer la chaîne en 8 opérations semblables, et donc en deux heures. Mais s'il existe une section courte, de 7 chaînons ou moins, il peut aussi ouvrir tous les chaînons de cette section courte et s'en servir pour unir certaines des huit autres sections. La section courte aura en quelque sorte disparu et le nombre maximum d'opérations sera alors réduit à 7. Comme il y a en tout 50 chaînons, on sait qu'une telle section courte existe puisque la section la plus courte comporte au plus 5 chaînons. Ce nombre 7 est optimal; pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le cas où une section comporte 2 chaînons alors que les 8 autres en ont chacun 6.

5. D'après la dernière colonne (en partant de la gauche), on a

(1) $\quad E + E = R$ ou bien $E + E = R + 10$.

Mais la première colonne montre que

(2) $\quad M + R = E$ ou bien $M + R = E - 1$

Dans les deux cas, on a $R < E$, ce qui nous permet de conclure de (1) que

(3) $\quad 2E = R + 10$

et que

(4) $\quad 5 \leq E$

Mais la troisième colonne et (3) indiquent que

(5) $\quad M + R = I - 1$ ou $M + R = (I-1) + 10$.

Dans le premier cas de (5), on aurait

$$E = M + R = I - 1$$

d'après (2), puisque $E \neq I$. Donc $I \geqslant 6$, d'après (4). Mais la relation $E = M + R$ impliquerait aussi que la somme de la deuxième colonne est inférieure à 10, i.e. que

$$I + I = M \quad \text{ou} \quad I + I = M - 1 ,$$

chose impossible si $I \geqslant 6$. Le premier cas de (5) est donc à exclure et on on a

$$M + R = (I-1) + 10.$$

D'après (2), on a aussi $M + R \leqslant 9$ et donc $I = 0$ et

(6) $\quad M + R = 9$.

De (2) et (6) on conclut que $E = 9$. Alors la dernière colonne donne $R = 8$ et la troisième $M = 1$.

On a donc

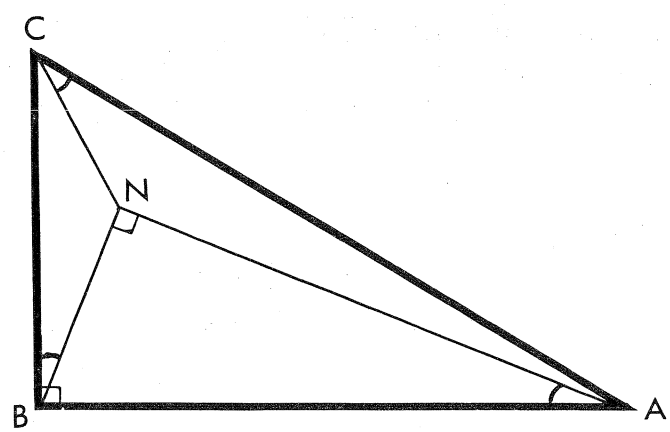
$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 8\ 9 \\ 8\ 0\ 1\ 9 \\ \hline 9\ 1\ 0\ 8 \end{array}$$

6. Soit $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$. Il s'agit de savoir combien de fois N est divisible par 10. Or un nombre est divisible par 10 si et seulement si il est divisible à la fois par 2 et par 5. Entre 1 et 100, il y a 50 multiples de 2, 25 multiples de $4 = 2^2$, 12 multiples de $8 = 2^3$, 6 multiples de $16 = 2^4$, 3 multiples de $32 = 2^5$ et 1 multiple de $64 = 2^6$. Le nombre 2 apparaîtra donc

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

fois dans la décomposition de N en facteurs premiers. De même il y a 20 multiples de 5 entre 1 et 100 et que 4 multiples de $25 = 5^2$. Donc N est divisible 24 fois par 5. C'est dire que N est divisible 24 fois par 10 et qu'il y aura 24 zéros à la fin du nombre N.

7. Supposons le problème résolu.



On remarque que
$\angle NBA + \angle BAN = 90^0$ car
$\angle BAN = \angle CBN$ par construction et
$\angle NBA + \angle BAN + \angle BNA = 180^0$ d'où
$\angle BNA = 90^0$.

Donc le point N est situé sur le cercle de diamètre AB centré en A. De façon similaire, on a $\angle NCB + \angle NBC = \angle BCA$ car $\angle NBC = \angle ACN$ par construction. De plus, $\angle NCB + \angle NBC + \angle CNB = 180^0$, d'où on obtient $\angle CNB = 180^0 - \angle BCA$.

Donc le point N est situé sur un arc capable de 180^0 - ∠BCA et de corde BC. D'où le point N est à l'intersection de ces deux arcs de cercle.

Maintenant construisons ce point avec le compas et la règle. Déterminons le centre O du segment BA et traçons le cercle de diamètre BA centré en O.

Prolongeons le segment AC au-delà de C et élevons une perpendiculaire à cette demi-droite au point C.

Maintenant, élevons la médiatrice du segment BC. Notons O' le point de rencontre de ces deux droites. Traçons le cercle de centre O' et de rayon O'C. (Remarquons qu'on a tracé ainsi un arc capable de 180^0 - ∠ BCA de corde BC.) Notons N le point de rencontre de ces deux cercles et traçons les segments NA, NB et NC.

Montrons maintenant que les angles NAB, NBC et NCA sont égaux. Les angles NAB et NBC sont égaux car ils sous-tendent le même arc dans le cercle centré en O. De la même façon, les angles NBC et NCA sont égaux car ils sous-tendent le même arc dans le cercle centré en O'.