Rétrospectives . . .

Rédacteur : Jean-Paul Collette, Université du Québec à Montréal

EVOLUTION DU CONCEPT DE LIMITE

Introduction historique

Le concept de limite englobe les concepts de continuité et d'infini; historiquement il est lié au concept de l'infinitésimal.

Malgré le fait qu'une définition satisfaisante du concept de limite apparaît seulement au XIX^e siècle il est indéniable cependant que les premières traces de ce concept sont contenues dans les arguments du philosophe Zénon d'Elée (V^e av. J.-C.). En effet, étudiant de Parménide d'Elée* il défend son maître en démontrant l'impossibilité du mouvement au moyen de quatre paradoxes célèbres:

a) la dichotomie: un mobile doit traverser un nombre infini de points dans un intervalle de temps fini. Au début, le mobile doit arriver au milieu de son parcours avant d'en atteindre le terme; puis avant d'arriver à ce milieu, il doit parcourir la moitié de la première partie, et ainsi de suite à l'infini. Donc le mobile n'atteindra jamais cette première moitié.

b) l'Achille: paradoxe du coureur rapide Achille et de la tortue. Achille part d'un point A et la tortue part d'un point B, A $\neq$ B. Achille doit parvenir au point B (départ de la tortue). Mais entre temps la tortue a franchi une petite distance et Achille devra de nouveau franchir cette distance et ainsi de suite; il s'approche de plus en plus de la tortue; mais ne l'atteint jamais.

---

* Parménide d'Elée (530-444?): philosophe grec qui soutenait que l'univers matériel est l'être unique, immobile dans lequel il n'y a ni générations, ni destructions, ni <u>mouvement</u>, ni <u>multiplicité</u>.

c) la flèche et le stade: paradoxes de même nature et ayant pour but de démontrer l'impossibilité du mouvement.

Dans le contenu de ces paradoxes nous pouvons distinguer plusieurs concepts clés du calcul différentiel:

1° concept de l'infini,
2° concept de l'infinitésimal,
3° concept de continuité,
4° concept de limite en un point.

Pendant 2000 ans, les philosophes et les mathématiciens ont tenté d'expliquer les arguments de Zénon en prenant pour acquis qu'ils étaient des "faussetés". Même aujourd'hui toute réponse satisfaisante demeure essentiellement une question de postulats basés sur deux idées fondamentales: l'acceptation du concept d'ensemble infini et l'idée de la continuité sans référence à un support physique.

Les Grecs n'ont pu répondre d'une façon satisfaisante aux objections du disciple de Parménide parce que leur mathématique est plutôt la science de situations pensées, lesquelles subsistent dans la nature, que celle des relations possibles. Par exemple, le nombre trois est pensé en termes d'un segment de droite de trois unités, la continuité est pensée en termes d'une ligne tracée sans lever le crayon, etc. Par opposition, une droite infinie existe dans la pensée grecque mais ne peut être utilisée dans leur géométrie au sens où on fait tendre vers l'infini, (le monde est fini, toute longueur est finie sauf peut-être chez Archimède), l'infiniment petit correspond à un point et un point, ça n'a pas de longueur, etc.

Par souci d'idéaliser le monde sensible (en termes de concepts), ils ont banni de leur géométrie l'infini et l'infinitésimal et, afin de préserver leur rigueur mathématique, ils ne pouvaient utiliser des concepts qui ne subsistent pas dans la nature.

L'évolution du concept de limite, du début du Moyen Age jusqu'au XIXe siècle, porte sur l'acquisition du concept de l'infini et sur la nature de la continuité mathématique en termes de variation.

Dès le quatrième siècle après Jésus-Christ, St-Augustin (docteur de l'Eglise) accepte l'existence de l'infini comme l'ensemble infini des entiers positifs et le reconnaît comme un être mathématique constant et non pas comme une variable. Il sera suivi par Galilée, Blaise Pascal et plusieurs autres qui conçoivent plus ou moins clairement l'infini actuel en opposition avec un infini potentiel. Par ailleurs, plusieurs philosophes et mathématiciens depuis Aristote ont refusé l'infini actuel; mentionnons parmi les plus célèbres, St-Thomas d'Aquin, René Descartes, Leibniz, Cauchy, Gauss. St-Thomas d'Aquin a essayé de considérer l'infini sous deux points de vue: créé (actuel) ou qui n'est pas créé (potentiel). L'infini créé n'existe pas selon lui et suivant le maître Aristote, mais il existe dans la puissance de Dieu de le créer.

Des élèves de St-Thomas d'Aquin ont poursuivi les idées du maître pour aboutir à l'acceptation de la divisibilité à l'infini et la possibilité de deux sortes d'infini: l'infini en acte et l'infini en devenir (l'infini mathématique de l'analyse).

Au XII^{e} siècle les écoles occidentales, surtout celle de Paris, ont étudié les relations entre l'infiniment grand et l'infiniment petit, et l'existence propre de l'infini.

Au début du XIV^{e} siècle, de nombreux professeurs ont découvert les véritables relations entre les deux infinis c'est-à-dire l'infini actuel (ou historiquement l'infini syncatégorique) et l'infini en puissance (ou historiquement l'infini catégorique).

Avec Albert de Saxe, professeur à la Sorbonne au début du XIV^{e} siècle, nous sommes certains que les deux sortes d'infini sont clairement perçus et, avec Grégoire de Rémini, général des Augustins et aussi professeur à la Sorbonne, l'infini actuel est déjà atteint.

Durant le XV^{e} et le XVI^{e} siècles, les hommes s'intéressent devantage aux lettres et par surcroit leurs discussions sont trop philosophiques car aucun contenu mathématique n'est disponible. Graduellement, les siècles suivants apporteront suffisamment de matériel mathématique pour susciter de nouveau ces discussions sur l'infini.

Au début du XIX^{e} siècle, l'acceptation de l'infini actuel devient de plus en plus évidente avec les contributions importantes de John Bolyai (co-inventeur 'une géométrie non-euclédienne), Bernard Bolzano (fondements et construction des ombres réels), Georg Cantor (théorie des ensembles), etc.

La nature du concept de continuité a préoccupé les philosophes et les athématiciens depuis les Grecs jusqu'au début du XX^{e} siècle. La théorie pytha-oricienne des proportions a dû être abandonnée lors de la découverte des quan-ités incommensurables. (Le rapport de la diagonale d'un carré avec un des côtés st un nombre irrationnel). Pour palier à ces difficultés, Eudoxe élabore une ouvelle théorie des proportions qui le conduit à la méthode d'exhaustion (équiva-ente à notre concept de limite au niveau opérationnel). Cependant, si le Grec eut montrer qu'un polygone inscrit dans un cercle peut en devenir le cercle en oublant à l'infini le nombre de ces côtés il restera toujours dans son esprit ne différence entre le polygone dédoublé à l'infini et le cercle. Pour le éomètre grec la limite en somme n'est jamais atteinte même si la différence est ussi petite que l'on veut.

La méthode d'exhaustion équivalente sous plusieurs aspects au type 'argument employé aujourd'hui pour l'existence de la limite ne représente pas ependant le point de vue impliqué dans le passage à la limite. Les Grecs ravaillent en fonction de grandeurs continues géométriques, ce qui implique la écessité de discuter de la continuité de l'espace dans l'optique d'une divisi-ilité (en pensée) sans fin.

Au Moyen-Age et plus précisément au début du XIV^{e} siècle, une nouvelle pproche au problème du concept de limite est amorcée avec l'introduction de 'idée de "force impulsive" (un corps en mouvement continue à se mouvoir à cause l'une tendance interne qu'il possède) associée à l'étude quantitative de la no-:ion de "variation". Ces idées provoqueront la naissance des travaux de Nicole)resme, évêque de Lisieux. En effet, un pas de plus est franchi lorsque Nicole)resme (1323?-1382) introduit des représentations graphiques concernant la notion le variation. A la même époque Albert de Saxe réussit à éclaircir la notion lifficile de limite: limite atteinte et limite non atteinte. Puis, aux XV^{e} et :VI^{e} siècles, plusieurs mathématiciens utilisent le "passage à la limite" à l'aide le la variation sans pour cela qu'une définition satisfaisante en soit donnée. .e Cardinal allemand, Nicolas de Cusa (1401-1465) discute de la variabilité sans ;tre capable cependant de l'appliquer efficacement; il met de l'avant le concept le limite mais il est incapable de passer à la limite. Il n'est pas non plus étranger avec la notion d'infinitésimal. Au début du XVII^{e} siècle, Simon Stevin exhiba le passage à la limite, sans exprimer effectivement qu'un triangle est la limite de la somme des parallélogrammes inscrits. Cependant la méthode d'exhaustion laissait toujours demeurer une différence aussi petite que l'on veut. Avec Stevin il conclut que si cette différence est aussi petite que désirée comme résultat, il n'y a pas de différence. En 1604, Luc Vallerio publia à Rome un ouvrage intitulé: "De centrogravitates" dans lequel on retrouve des idées modernes au sujet du concept de limite et des démonstrations utilisant des infinitésimaux. En particulier on y discerne, quoique vaguement, l'idée de limite d'un rapport de deux variables qui est égale au rapport des limites des deux variables (limite du quotient).

Avec les contributions importantes de Pascal, Fermat, Newton, Wallis, Leibniz, les frères Bernoulli, etc, le calcul différentiel et intégral se développe rapidement durant le XVII^{e} siècle. Les quantités variables y sont représentées graphiquement à cette époque. Cependant, les efforts répétés des mathématiciens du XVII^{e} et du XVIII^{e} siècles ne peuvent contrer les défauts ou imperfections contenus dans leur conception de la limite.

Au début du XIX^{e} siècle on remarque encore les lacunes suivantes:

a) l'infinitésimal est une quantité constante dans de nombreux textes qui traitent de la limite, malgré les efforts de certains mathématiciens comme A.L. Cauchy, (1789-1867), pour éliminer ces quantités infinitésimales constantes.

   Vers 1821, Cauchy définit la limite dans son cours d'Analyse comme suit: Lorsque des valeurs successives attribuées à une variable approche une valeur fixe indéfiniment de telle manière qu'elles en diffèrent d'une quantité aussi petite que l'on veut, la valeur fixe est appelée la limite des autres.

b) l'impossibilité d'éliminer, dans le calcul de la dérivée, l'expression indéterminée $\frac{0}{0}$ empêche les mathématiciens de bien reconnaître les restrictions concernant la limite d'un quotient de fonctions.

c) l'absence d'une théorie des nombres réels (champ des réels) entraîne des fausses interprétations en identifiant la limite à un <u>nombre</u>.

d) le calcul des limites s'effectue sans discernement au sujet de l'existence même de la limite. De fait les fonctions utilisées à cette époque étaient surtout des fonctions simples pour lesquelles la limite posait rarement des difficultés.

e) la doctrine de "ce qui est vraie jusqu'à la limite est vraie à la limite" est trop bien acceptée pour permettre aux mathématiciens de bien discerner le passage à la limite et la valeur de la limite (si elle existe).

f) la question suivante: "une variable atteint-elle sa limite?" n'est pas encore solutionnée dans l'optique d'une définition rigoureuse du concept de limite reliée à l'acceptation ou au refus de l'infini actuel.

Toutes ces lacunes seront éliminées graduellement durant le XIX^{e} siècle par les contributions majeures des mathématiciens de ce siècle.