OMITE DE TERMINOLOGIE

M8: *Equivalence*

1) Intuitivement: Une relation binaire R dans E est dite relation d'équivalence dans E si elle indique un critère permettant de trier (classifier) les éléments de E en classes disjointes.

Exemples:

I) Au centre d'achats, les oeufs sont classifiés en trois classes: petits, moyens, gros. Un oeuf ne peut être à la fois petit et moyen, la classification est donc nette.

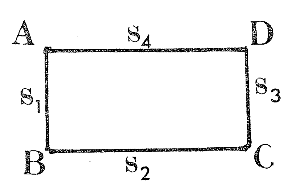
De façon plus précise: E est un ensemble d'oeufs, R une relation binaire dans E telle que x R y signifie "x est d'égale grosseur que y".

Deux oeufs d'une même classe sont "égaux en grosseur" (ou "d'égale grosseur") tout en étant différents entre eux. (voir M 9: Egalité)

Ce que l'on convient d'exprimer en style mathématique par $x \cong y$ modulo R.

II) a) Soit le rectangle ABCD, si s_1 et s_2 signifient des segments opposés, on ne peut pas écrire $s_1 = s_3$ mais bien $s_1 \cong s_3$ ou en précisant $s_1 \cong s_3$ modulo R_1.

R_1 signifiant "est isométrique à"



b) au lieu de R_1 on aurait pu considérer R_2 avec "est parallèle à", etc.

Dans ces exemples, on voit qu'il y a toujours une égalité sous-jacente:

grosseur x = grosseur y

mesure s_1 = mesure s_3

direction s_1 = direction s_3.

De façon générale on peut écrire: classe de s modulo R égale classe de s' modulo R (où $[s]_R = [s']_R$ signifient $s \cong s'$ modulo R, cependant le comité ne s'est pas mis d'accord sur le symbole $[\ ]_R$, bien que l'on soit d'accord sur le principe d'un symbole.)

DEFINITION

Une relation binaire dans E est une relation d'équivalence dans E

1) ssi elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive, ou

2) ssi elle induit une partition dans E.

(voir à la rubrique "Discussions" la justification du passage de 1) à 2)).

2) Justification: La relation d'équivalence se perçoit le mieux par sa propriété caractéristique d'induire une partition. Sous cet aspect, on l'utilise souvent dès l'élémentaire, implicitement toutefois. Dès lors, une terminologie conséquente de l'équivalence et de l'égalité à l'élémentaire facilitera l'introduction et l'explicitation de ces notions au secondaire.

3) Exemples et locutions: Exemples: voir tout au long du texte.

Locutions: Comme dit plus haut: énoncer $x \cong y$ ou x congruent à y ou x équivalent à y suffit à condition que le contexte soit clair. Sinon il faut citer la propriété, c'est-à-dire $x \cong y$ modulo R.

Pour certaines relations d'équivalence des plus utilisées on a forgé un terme propre permettant d'exprimer d'une fois "congruent à ... modulo R" tel que: équipotent à, A est équipotent à B (au lieu de "A est congruent à B modulo R, avec R signifiant "est d'égale puissance")

parallèle à, a est parallèle à b

isométrique à, s est isométrique à s'

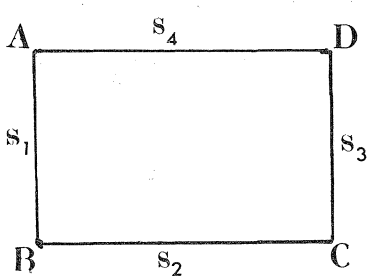
semblable à, ABC est semblable à A'B'C'

isomorphe à, (par exemple pour des groupes)

équipollent à (pour des flèches)

4) Eliminations et mises en garde: Certains auteurs écrivent l'égalité entre éléments d'une même classe, confondant le nom de la classe avec le nom de ses éléments. Quel étudiant admettra 5 = 7 pour signifier que 5 et 7 sont de même parité et représentent tous deux la classe des nombres impairs.

Eviter de confondre équivalence et égalité. A l'élémentaire au moins le professeur utilisera la bonne terminologie. Ainsi s_1 et s_3 sont d'égale longueur, sont égaux en longueur (ici on risque de perdre la finale de la phrase); la longueur de s_1 est égale à celle de s_3.



longueur s_1 = longueur s_3 , mes s_1 = mes s_3 , s_1 est isométrique à s_3, s_1 et s_3 sont isométriques (entre eux).

5) Discussions: Lors de la réunion, on a fait remarquer le fait que le passage de la définition en réflexivité, symétrie et transitivité à celle d'induction de partition est souvent peu articulé, on se contente de citer.

Voici donc une suggestion de justification parmi d'autres.

> Toute relation R dans E à la fois réflexive, symétrique et transitive induit une partition dans E (c'est-à-dire un ensemble de sous-ensembles,non-vide, assurant recouvrement de E et disjoints deux à deux.)

R induit dans E des sous-ensembles d'éléments équivalents entre eux.

a) Le recouvrement est assuré car tout élément $a \in E$ appartient au moins à l'un des sous-ensembles. En effet, par réflexivité $a \cong a$. De sorte que dans le cas le plus particulier, il existerait alors $\{a\}$.

b) Les sous-ensembles sont disjoints deux à deux, autrement dit: tout élément appartient au plus à l'un des sous-ensembles induits. Soit A et B deux sous-ensembles formés des éléments équivalents à a et b respectivement, avec $a \ncong b$, sinon les ensembles seraient confondus.
Supposons $A \cap B \neq \emptyset$ avec $c \in A \cap B$. Cela entraîne $c \cong a$ et $c \cong b$.
Dès lors, par symétrie et transitivité, $a \cong b$. Donc $A \cap B = \emptyset$. c.q.f.d.

Réciproquement: Toute partition de E induit une relation d'équivalence dans E.

Cette proposition n'offre pas de difficulté.

M9: *Egalité*

a et b sont égaux entre eux si quel que soit l'ensemble E, $a \in E \Leftrightarrow b \in E$.

Autrement dit: quelle que soit la propriété P, $P_a \Longleftrightarrow P_b$ (Leibnitz) (P_a signifie a vérifie P).

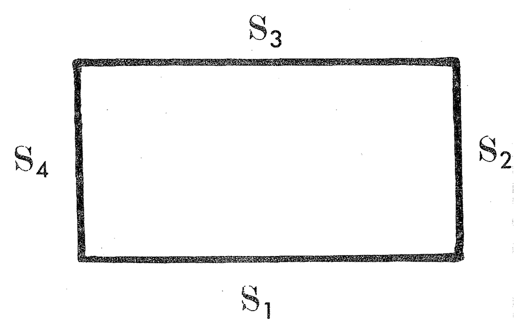
Cependant, il est peut-être plus réaliste de considérer l'égalité comme un terme primitif - délicat!

<u>Par définition</u>: $4 = 3 + 1$ les objets nommés sont égaux, mais "4" $\neq$ "3" + "1". Les noms sont différents.

<u>Justification</u>: Symbole souvent mal utilisé par les étudiants.

<u>Elimination</u>:

- Eviter d'utiliser = pour $\cong$
  Ainsi dans le rectangle ne pas écrire $s_1 = s_3$
  (si l'on considère s comme des segments - ensembles de points).



- Condamner $\frac{2}{0} = \infty$ (que l'on songe par exemple à $\dfrac{2}{\sqrt{x^2(x-1)}}$ avec $x = 0$!
- Eviter d'utiliser = pour "est". Sinon 3 = (nombre premier) et 5 = (nombre premier) donne 3 = 5 par symétrie et transitivité.
- $\log 3 = 0.47$: faux pour la fonction "log", mais vrai pour la fonction associée "table log".
- Certains écrivent $3 = 0.47$, $x^3 = 3x^2$, etc.
- Signe = pour
  $3x = 7 = x = \frac{7}{3}$

Les mots précédés de P constituent un projet parmi d'autres pour permettre au comité de faire ultérieurement les propositions les plus adéquates sur des points particulièrement délicats.

P1: *Relation*

1. On propose de prendre - au moins pour les niveaux élémentaire et secondaire - le terme "relation" comme primitif. Le professeur pourrait alors employer ce terme dans son acception naïve (celle du français usuel) tout en mentionnant que l'emploi mathématique du terme "relation" peut être précisé; il parlerait de relations extramathématiques comme

relation de paternité,

puis introduirait quelques exemples mathématiques importants:

égalité, inclusion, appartenance ($\in$), la relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{R}$, la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$.

Remarquant que l'affirmation que x est égal à y se note "$x=y$", que x appartient à X se note "$x \in X$", que x divise y se note "$x \mid y$", il introduira la notation "$x\ R\ y$" pour signifier que x est en relation R avec y.

On propose aussi d'adopter au niveau collégial la définition suivante: une relation entre les variables x et y est une formule du langage mathématique dont les variables libres sont x et y, et elles seules.

2. Dans cette conception, la relation est un objet logique; elle est vraiment une relation au sens du dictionnaire: "Relation: rapport entre deux personnes, entre deux choses, considérées respectivement l'une à l'autre."

L'ensemble des couples $\{(x,y) \mid x\ R\ y\}$ - s'il existe, ce qui n'est pas toujours le cas - est alors considéré comme une <u>représentation ensembliste</u> de la relation R. Cet ensemble est appelé graphe (relationnel) associé à la relation R.

On propose cependant de ne pas restreindre la représentation ensembliste à l'ensemble des couples, mais d'introduire un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Ainsi, la relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{R}$ serait représentée par

$$(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} , \mathbb{R} , \mathbb{R})$$

Ce triplet est appelé correspondance.

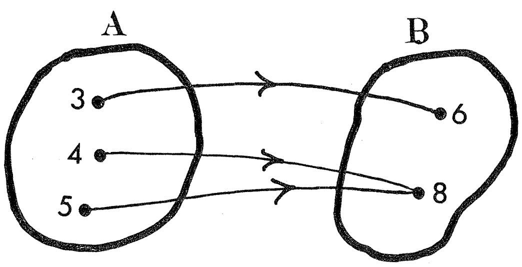
En général, étant donné une relation R telle que $x \; R \; y$ avec $x \in A$ et $y \in B$, on a la représentation ensembliste suivante de R:

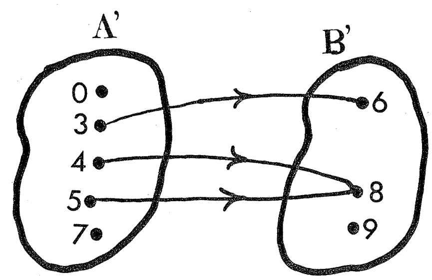
$$(\{(x,y) \mid x \; R \; y\} , \; A , \; B)$$

Le triplet est appelé correspondance; l'ensemble des couples est appelé graphe de la correspondance; A est appelé ensemble de départ; B est appelé ensemble d'arrivée.

Remarque.

La correspondance a l'avantage sur le graphe d'être mieux adaptée à la représentation par graphique sagittal. Ainsi, les deux graphiques sagittaux





sont différents tout en déterminant les mêmes graphes: celui de gauche représente une fonction surjective de A dans B, alors que celui de droite représente une "fonction non partout définie" non surjective. Cette distinction entre les graphiques sagittaux, qui est "oubliée" par les graphes, est conservée dans les correspondances.

De plus, la correspondance prépare à la notion "moderne" de fonction explicitée dans le projet suivant.

Le Comité de Terminologie

N. Evreinow
Th. Déry
J. Grignon
P. Laliberté
M. Larivière
R. Ouellet
A. Tellier
J.B. Veilleux.