CASSE-TÊTE ET AMUSEMENTS MATHÉMATIQUES

par Ronald Bourguignon

Un problème de directeur d'école

Il y a quelques mois, un directeur d'école d'une commission scolaire de la région de Québec me téléphonait pour me dire qu'il avait un problème mathématique à me proposer et qu'il comptait sur moi pour le résoudre. Confiant qu'un directeur d'école moyen pousse rarement l'originalité jusqu'à proposer des problèmes mathématiques insolubles, j'accepte le rendez-vous qu'il me réclame.

Je dois vous avouer qu'après qu'il eut énoncé les données de son problème, je dus me rendre à l'évidence: le directeur d'école avait l'air d'être au-dessus de la moyenne des directeurs d'école moyens et le problème avait l'air plus intéressant que la moyenne des problèmes mathématiques que peut poser un directeur d'école moyen. (Comme je tiens à ma santé, il n'est probablement pas inutile de mentionner que si un directeur d'école lit la présente chronique, je le considère comme étant au-dessus de la moyenne).

Je vous livre donc ce problème en espérant que des lecteurs pourront proposer des méthodes d'approche intéressantes pour le résoudre.

En septembre 1971, 80 élèves étaient inscrits à la maternelle de l'école X X X et divisés en 4 groupes de 20 élèves. Nous désignerons ces groupes par MA, MB, MC et MD. En septembre 1972, ces mêmes élèves seront en 1re année et divisés en 3 groupes 1A, 1B et 1C de 27, 27 et 26 élèves respectivement. En 2e année (septembre 1973), ces élèves seront redivisés en 3 groupes 2A, 2B et 2C de 27, 27 et 26 élèves respectivement. Finalement, en 3e année (septembre 1974), il seront redivisés en 3 groupes 3A, 3B et 3C de 27, 27 et 26 élèves respectivement.

Maternelle (*septembre 1971*)	M A (20)	M B (20)	M C (20)	M D (20)
1re année (*septembre 1972*)	1 A (27)	1 B (27)	1 C (26)	
2e année (*septembre 1973*)	2 A (27)	2 B (27)	2 C (26)	
3e année (*septembre 1974*)	3 A (27)	3 B (27)	3 C (26)	

Le directeur de l'école, désireux que les 80 élèves se connaissent tous au bout de 4 ans, pose une condition à la formation des groupes:

> <u>les groupes doivent être formés de façon à ce qu'au terme de ces 4 années, tout élève devra avoir été pendant au moins un an dans le même groupe que tout autre élève.</u>

Ce que le directeur me demandait de lui indiquer, c'est la manière de former ses groupes d'élèves pour respecter la condition. Après quelques vaines tentatives, je me suis rendu compte que le problème est moins banal qu'il n'en a l'air à première vue. J'ai même de plus en plus la conviction (sans toutefois avoir pu le démontrer) que le problème n'admet pas de solution. J'en parlerai plus longuement dans la prochaine chronique. D'ici là, à vous de jouer!

Solution du dernier problème

D'un tas initial de 15 allumettes, deux joueurs A et B retirent à tour de rôle un nombre x d'allumettes tel que $x \in \{1, 2, 3\}$. Celui qui est forcé de prendre la dernière allumette perd.

Pour que le joueur A (c'est toujours A qui commence) soit assuré du gain, il lui suffira de toujours mettre le joueur B devant un nombre d'allumettes de la forme $4k + 1$, où $k \in \mathbb{N}$. En effet, il est facile de constater que

(a) si à un moment donné de la partie, le joueur B se trouve devant un nombre d'allumettes de la forme $4k + 1$, alors le joueur A peut toujours faire en sorte qu'au coup suivant il en soit encore ainsi (si B enlève x allumettes, A n'a qu'à en retirer $4 - x$ au coup suivant);

(b) 1 est de la forme $4k + 1$.

Pour commencer la partie, le joueur A devra donc enlever 2 allumettes, en laissant ainsi le joueur B devant 13 allumettes, nombre qui est de la forme $4k + 1$, avec $k = 3$. Quel que soit le nombre x d'allumettes ($x \in \{1,2,3\}$) que retire B, A n'a qu'à en enlever $4 - x$ au coup suivant, laissant ainsi B devant 9 allumettes, qui est encore de la forme $4k + 1$, avec $k = 2$. La partie se poursuit ainsi jusqu'à ce que B se retrouve devant 1 allumette, qui est encore de la forme $4k + 1$, avec $k = 0$.

On peut généraliser la stratégie pour un nombre quelconque n d'allumettes. Pour calculer le nombre initial i d'allumettes que le joueur A doit enlever, il suffit de constater que i doit être tel que $n - i$ soit de la forme $4k + 1$:

$$n - i = 4k + 1$$

ou encore

$$n - 1 = 4k + i\ .$$

Cette dernière relation exprime que i est le reste de la division de $n - 1$ par 4, ce qu'on peut écrire sous la forme

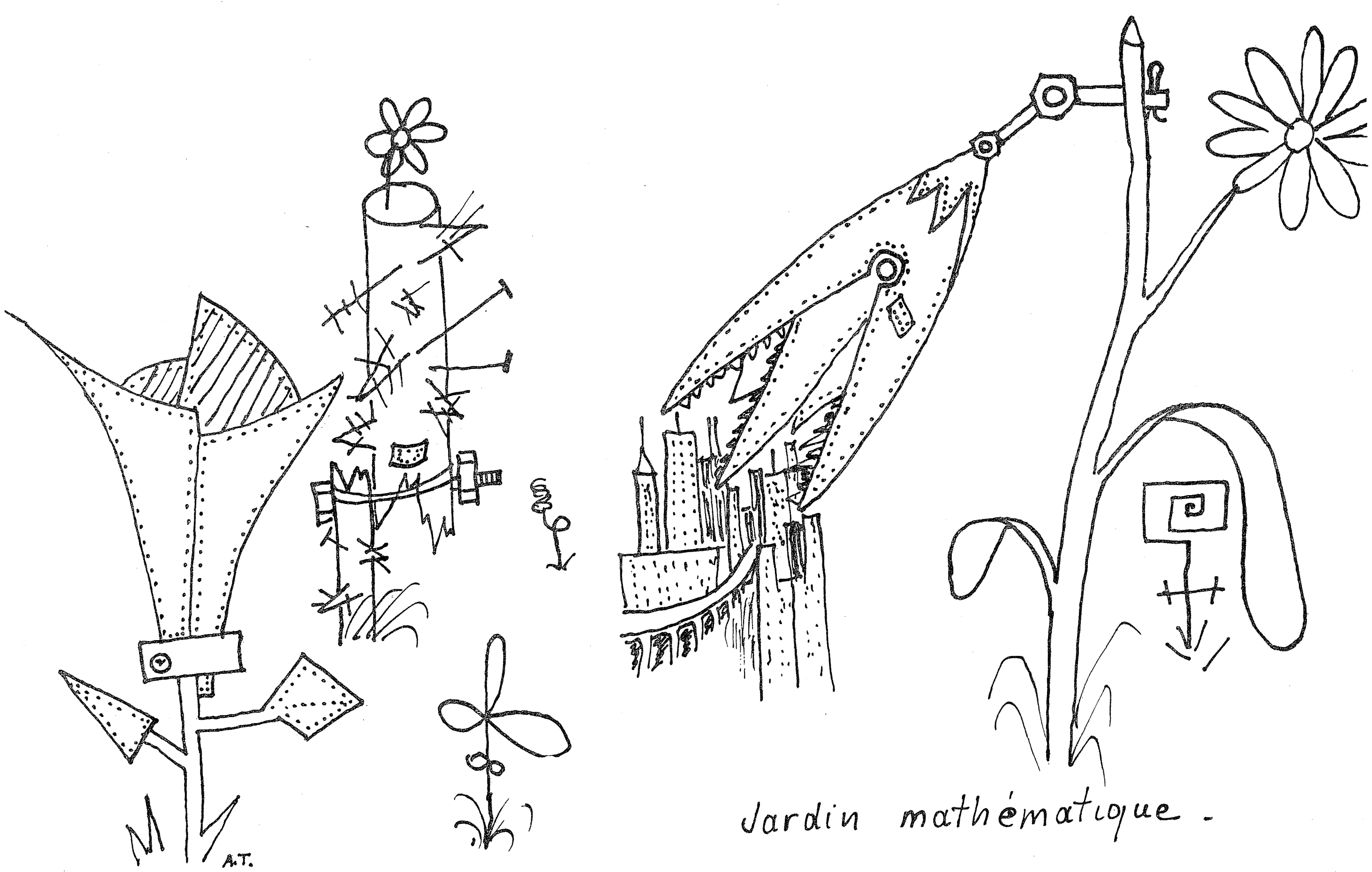
$$i \equiv n - 1 \pmod 4).$$

Par exemple, pour n = 15, i = 14 (mod 4) = 2, ce qui confirme le résultat déjà obtenu plus haut. Pour n = 1000, i = 999 (mod 4) = 3. Le joueur A devra donc, dans ce cas, enlever 3 allumettes au coup initial, laissant ainsi son adversaire devant 997 allumettes, nombre qui est de la forme 4k + 1.

Mais il est un cas où le joueur A n'est pas assuré du gain. C'est le cas où n est de la forme 4k + 1 (dans ce cas, i = 0). Dans une telle situation, c'est le joueur B qui, s'il connaît la stratégie du jeu, peut gagner.

J'ai été agréablement surpris de recevoir des lettres de lecteurs de cette chronique. Au moment de rédiger ces lignes, quatre lecteurs m'ont fait parvenir une solution correcte (quoiqu'exprimée parfois autrement) au problème posé. Ce sont MM. Jean-Guy Yelle (St-Rémi), Robert Sauvé (Salaberry-de-Valleyfield), Denis Lavigne (Sherbrooke) et Rémi Tremblay (Alma).

M. Maurice Joyal a conçu un programme en ITF: BASIC permettant de laisser découvrir à un étudiant de niveau secondaire l'algorithme de ce jeu. Ceux qui sont intéressés à obtenir plus de détails concernant ce programme pourront en faire la demande à M. Maurice Joyal, 500 Victoria, app. 207, Greenfield Park; tél.: 671-7773.



Jardin mathématique.