# L'OLYMPIADE MATHEMATIQUE INTERNATIONALE

Chaque année, depuis 1959, se tient une olympiade mathématique internationale, concours mathématique de haut calibre mettant en lice des équipes d'étudiants de niveau secondaire déléguées par les pays participants. Réservée initialement aux représentants des pays communistes, l'olympiade est devenue depuis quelques années ouverte à d'autres pays: Hollande, Grande-Bretagne, etc. Le Canada n'a pas encore été invité à y participer.

Nous présentons ici le questionnaire de la XI$^e$ olympiade mathématique internationale, tenue à Bucarest en juillet 1969 et celui de la XII$^e$ olympiade, organisée à Budapest-Keszthely en juillet 1970. Le nombre de points accordés varie selon les problèmes. L'olympiade se passe en deux séances de quatre (4) heures, réparties sur deux jours.

Pour donner une idée des résultats obtenus, voici le classement des pays participants lors de la XI$^e$ olympiade en 1969: HONGRIE (77%), ALLEMAGNE DE L'EST (75%), URSS (72%), ROUMANIE (68%), GRANDE-BRETAGNE ( 60%), BULGARIE (59%), YOUGOSLAVIE (57%), TCHECOSLOVAQUIE (53%), MONGOLIE (38%), POLOGNE (37%), FRANCE (37%), SUEDE (33%), BELGIQUE (18%), HOLLANDE (16%).

## Questionnaire de la XIe olympiade (1969)

1. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels a avec la propriété suivante: le nombre $z = n^4 + a$ n'est premier pour aucun nombre naturel n. (5 points)

2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des constantes réelles, x une variable réelle et $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x)$.

Prouver que si $f(x_1) = f(x_2) = 0$, alors $x_2 - x_1 = m\pi$ pour un entier relatif m. (7 points)

3. Pour chacune des valeurs $k = 1, 2, 3, 4, 5$, trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire un nombre réel a positif pour qu'il existe un tétraèdre dont k arêtes soient de longueur a et les $6 - k$ autres arêtes soient de longueur 1. (7 points)

4. Sur un segment AB pris comme diamètre, on construit un demi-cercle $\Gamma$. Soit C un point de la ligne $\Gamma$ distinct de A et de B. On appelle D le pied de la perpendiculaire menée de C sur AB. On construit trois cercles ayant AB comme tangente commune: l'un, $\Gamma_1$ est le cercle inscrit du triangle ABC, alors que $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$ sont tous deux tangents à la fois au segment CD et à $\Gamma$. Démontrer que les cercles $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$ ont une seconde tangente commune. (6 points)

5. On donne n points dans un plan $(n > 4)$, trois à trois non alignés. Prouver qu'il existe au moins $\binom{n-3}{2}$ quadrilatères convexes dont les sommets sont parmi ces n points. (7 points)

6. Prouver que pour des nombres réels $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ avec $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ et $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} .$$

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait là une égalité? (8 points)

# Questionnaire de la XIIe olympiade (1970)

1. On considère un triangle ABC et un point M quelconque situé sur le côté AB. Soient $r_1$, $r_2$ et r les rayons des cercles inscrits aux triangles AMC, BMC et ABC respectivement. On désigne par $s_1$, $s_2$ et s les rayons des cercles exinscrits à ces trois triangles respectivement et situés à l'intérieur de l'angle ACB. Prouver que:

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r}{s} .$$

2. Soient des nombres naturels a, b et n tous supérieurs à 1. On considère les nombres

$A_n = \underline{x_n}\,\underline{x_{n-1}}\,\underline{x_{n-2}} \cdots \underline{x_0}$ et $A_{n-1} = \underline{x_{n-1}}\,\underline{x_{n-2}} \cdots \underline{x_0}$ (écrits dans la base a)

$B_n = \underline{x_n}\,\underline{x_{n-1}}\,\underline{x_{n-2}} \cdots \underline{x_0}$ et $B_{n-1} = \underline{x_{n-1}}\,\underline{x_{n-2}} \cdots \underline{x_0}$ (écrits dans la base b)

écrits à l'aide des chiffres $\underline{x_n} \neq 0$, $\underline{x_{n-1}} \neq 0$, $\underline{x_{n-2}}$, ..., $\underline{x_0}$

Montrer que l'on a $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} < \dfrac{B_{n-1}}{B_n}$ si et seulement si a > b.

3. Soient des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tels que

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \qquad (1)$$

On considère la suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ définie par

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} .$$

Démontrer que: (a) Pour tout nombre naturel $n \geq 1$, $0 \leq b_n < 2$.

(b) Etant donné un nombre c avec $0 \leq c < 2$, il existe des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ satisfaisant à la propriété (1) et tels que $b_n > c$ pour une infinité de valeurs de n.

4. Trouver tous les entiers positifs n qui ont la propriété suivante: l'ensemble $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ est décomposable en deux sous-ensembles non vides et disjoints de façon que le produit des éléments de l'un soit égal au produit des éléments de l'autre.

5. On considère une pyramide ABCD de trois côtés, dont l'angle BDC est droit. Le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur le plan du traingle ABC coïncide avec le point de rencontre des hauteurs de ce triangle. Prouver que $(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \leq 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)$. Quand y a-t-il égalité?

6. On donne cent points dans un plan, trois à trois non alignés. Au plus 70% de tous les triangles ayant leurs sommets parmi ces cent points n'ont que des angles aigus. Démontrer.