

La logique à l'Université ()*

par Marc Vienne

Département de Mathématiques

Université du Québec à Montréal

Le problème théorique de l'enseignement de la logique sera résolu lorsque l'on aura répondu aux questions suivantes: quels sont les programmes? quelles directives pédagogiques doivent accompagner les programmes? Le présent article a pour but de préciser les conditions dans lesquelles on peut obtenir une réponse à la première question, lorsque l'on se restreint au niveau universitaire, en répondant aux questions suivantes: qu'est-ce que la logique? quelle est l'ampleur du développement de la logique? qui doit enseigner la logique? doit-on enseigner la logique à l'Université et à qui? comment déterminer les programmes?

1. QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE?

La logique est l'étude des inférences ⁽¹⁾ mais non le fait d'inférer. La logique formelle est l'étude de la forme ou structure des inférences et des éléments qui les composent. La logique mathématique (ou symbolique) est l'étude de la logique formelle au moyen des méthodes mathématiques. Pour étudier la logique formelle à l'aide des mathématiques on fabrique des systèmes de signes artificiels appelés calculs logiques ⁽²⁾ dont le but est d'éviter les faiblesses logiques des langues naturelles. Les calculs logiques sont des cas particuliers de systèmes de signes artificiels plus généraux appelés théories ⁽³⁾. La science qui étudie les théories est la métamathématique ⁽⁴⁾. Puisque la logique formelle donne lieu à divers calculs logiques (e.g. calculs propositionnels et calculs des

(*) Les idées exposées dans le présent article coïncident avec celles formulées par l'auteur dans le cadre du Séminaire sur l'enseignement de la logique tenu à l'Université du Québec à Montréal le 25 février 1972.

prédicats classiques, multivalents, intuitionnistes, modaux) et que les méthodes utilisées dans l'étude de ces calculs s'appliquent également à beaucoup d'autres théories il est difficile de distinguer entre logique mathématique et métamathématique. En conséquence nous ne distinguerons pas la logique mathématique de la métamathématique et par logique nous entendrons logique mathématique.

2. QUELLE EST L'AMPLEUR DU DEVELOPPEMENT DE LA LOGIQUE?

I. Dans son article [3] L. Henkin distingue pour les années 1936-1961, sept directions principales de la logique:

- 1) fondements de la théorie des ensembles
- 2) problèmes de décision
- 3) fonctions récursives
- 4) logique algébrique
- 5) théorie des modèles
- 6) théorie de la preuve
- 7) métamathématique de l'algèbre (i.e. application de la logique à la démonstration de certains théorèmes d'algèbre).

II. Dans leur article [8] les russes Vojsvillo, Kuznecov, Lahuti et Finn mentionnent les branches suivantes:

- 1) sémantique
- 2) logique modale
- 3) théorie de l'information
- 4) linguistique mathématique
- 5) traduction à l'aide de machines
- 6) logiques multivalentes
- 7) programmation

III. Il ressort des articles [4] de Rescher et [1] de Bar-Hillel que l'on peut dresser la "carte" ⁽⁵⁾ suivante du domaine de la logique.

A. *Logique de base*

1. logique traditionnelle
2. logique moderne orthodoxe
3. logique moderne non orthodoxe

B. *Métalogique*

1. syntaxe logique
2. sémantique logique
3. pragmatique logique
4. linguistique logique

C. *Développements mathématiques*

1. arithmétiques
2. algébriques
3. récursifs
4. théorie de la preuve (axiomatisabilité, méthodes de Gentzen)
5. logique probabiliste
6. théorie des ensembles
7. fondements des mathématiques

D. *Développements scientifiques*

1. applications physiques
2. applications biologiques
3. applications aux sciences sociales

E. *Développements philosophiques*

1. applications éthiques
2. applications métaphysiques
3. applications épistémologiques
4. logique inductive.

3. QUI DOIT ENSEIGNER LA LOGIQUE?

Traditionnellement ce sont les philosophes qui ont enseigné la logique. Depuis l'avènement de la logique mathématique avec Boole (1847) et Frege (1879) ce sont surtout les départements de mathématiques qui ont dispensé l'enseignement de la logique. Mais depuis les années 60 environ, une réaction se dessine: d'une part les russes Vojsvillo, Kuznecov, Lahutin et Finn recommandent, devant l'ampleur du sujet, la formation d'un département séparé de logique (à l'instar e.g. d'un département de psychologie) relevant de la philosophie plutôt que des mathématiques; ils prévoient un programme d'études de 5 ans suivi d'une année et demie pour l'obtention d'un diplôme avancé; de plus la connaissance de l'anglais et d'au moins

une autre langue étrangère serait exigible; d'autre part dans son article Rescher souligne le développement rapide de considérations logiques dont la portée philosophique n'est pas négligeable et qui exigent un traitement séparé au point qu'une rupture avec les méthodes mathématiques pourrait présenter un danger dans un avenir assez immédiat.

Par ailleurs certaines disciplines comme le droit utilisant des types de logiques spéciaux (logiques déontiques) et par suite il se pourrait que les juristes veuillent un jour enseigner la logique juridique (il existe des livres sur la logique juridique formalisée).

Enfin les linguistes pourraient revendiquer leurs droits à l'enseignement de la logique.

La réponse à la question "qui doit enseigner la logique" ne peut donc pas être catégorique: elle dépend de ceux à qui on veut l'enseigner. Mais une chose reste: l'empreinte des mathématiques sur la logique est indélébile et marque même les développements philosophiques et autres de la logique.

4. DOIT-ON ENSEIGNER LA LOGIQUE A L'UNIVERSITE ET A QUI?

La logique doit certainement s'enseigner à l'Université car si on ne l'y enseigne pas où l'enseignera-t-on? Mais à qui doit-on l'enseigner?

Tout d'abord aux étudiants de première année, d'après W.A. Coole (cf. [2]). On peut peut-être, comme en Pologne, se restreindre seulement aux étudiants de quelques facultés, mais une chose est désormais acquise: philosophes, mathématiciens, juristes et linguistes entre autres ont certainement intérêt à être initiés à la logique.

Ensuite aux étudiants qui veulent poursuivre des études dans ce domaine.

Enfin, d'après A. Grzegorzcyk à tous ceux sans exception, qui se destinent à l'enseignement (il est intéressant de noter à ce sujet que Grzegorzcyk s'oppose à l'enseignement obligatoire de la logique à tous les non philosophes). (6)

5. COMMENT DETERMINER LES PROGRAMMES?

A. Écueils à éviter

1. Un certain nombre d'écueils sont à éviter dont le principal est la tendance à surcharger les cours de logique de résultats strictement mathématiques au dépens par exemple de considérations linguistiques, logiques et philosophiques. On va même jusqu'à présenter le sujet de telle sorte que des résultats non évidents (e.g. la complétude du calcul propositionnel) sont traités en une page ou deux sans plus en utilisant une démonstration inintelligible tout au moins à un débutant et qui ne donne aucune information sur la façon dont on a pu découvrir le théorème. D'autres auteurs se plaisent à utiliser des formulations bizarres mais très sophistiquées dont les avantages techniques sont de donner une formulation simple d'un résultat (e.g. le théorème d'interpolation) qui sous cette forme ne se généralise pas aux formulations usuelles.

2. Une autre tendance néfaste qu'il faut éviter consiste à prendre tout ce qui a été fait comme évident et de présenter aux étudiants des bribes de résultats, ici aussi très élégamment, mais trop rapidement et sans motivation. Une telle attitude est déplorable car s'il a fallu 2,000 ans et un grand nombre de bons esprits pour donner à la logique sa forme actuelle, ceci ne prouve pas qu'il faille en faire fi bien au contraire. A ce sujet Lukasiewicz et Tarski dans leur article "Investigation into the sentential calculus" (cf. [7] p. 59) ⁽⁷⁾ affirment "... as the simplest deductive discipline, the sentential calculus is particularly suitable for metamathematical investigations. It is to be regarded as a laboratory in which metamathematical methods can be discovered and metamathematical concepts constructed which can then be carried over to more complicated mathematical systems". On peut d'ailleurs remarquer que, mathématiquement, le calcul propositionnel est intimement lié à la théorie des algèbres de Boole.

B. Désidératas à satisfaire.

1. Un certain nombre de desideratas peuvent être pris en considération. Par exemple la position centrale occupée par le calcul propositionnel dans les recherches logiques et aussi par le calcul des prédicats exige qu'une initiation à la logique en présente quelques aspects.

2. En vue de faciliter l'utilisation de la logique on peut souhaiter que les cours de logique mettent l'accent sur les erreurs commises dans les diverses sciences et sur les notions et problèmes reliés à ces sciences (e.g.

l'analyse logique des mesures pour les étudiants en physique, les classifications logiques pour les étudiants en droit). (cf. [6]).

3. Ensuite les recherches logiques étant basées d'abord et avant tout sur une analyse des langues naturelles, il est désirable que ce contact soit maintenu dans les cours de logique.

4. Enfin en mathématiques on peut distinguer en gros deux tendances principales: le platonisme pour lequel les objets mathématiques ont une existence propre indépendante de la façon dont on les appréhende (on découvre un théorème, on ne l'invente pas) et le constructivisme pour lequel les objets mathématiques n'ont d'existence que si l'on peut les construire (on ne découvre pas un théorème, on l'invente en le construisant). Il est important de remarquer que le point de vue naïf en mathématiques est une forme de platonisme et que la logique dite classique est celle du platonisme. En conséquence le premier contact des étudiants avec la logique doit mettre l'accent sur le platonisme (ce qui simplifie l'exposition) et expliquer clairement le pourquoi du constructivisme, mais subséquentement.

C. Programmes de logique pour les mathématiques.

Il est bien clair que plusieurs types de programmes de cours peuvent d'une part éviter les écueils et d'autre part satisfaire aux desideratas mentionnés plus haut. Cependant lorsque l'on veut s'adresser à des mathématiciens les considérations suivantes semblent montrer que le contenu des cours au niveau universitaire est largement fixé:

1. la théorie des algèbres de Boole est importante et bien développée et de plus elle est intimement reliée au calcul propositionnel qui fournit un support concret à des constructions et résultats algébriques délicats.

2. Les principales phases du développement de l'algèbre ont été cristallisées dans des traités célèbres: Le Cours d'Algèbre Supérieure de Serret, le Lehrbuch der Algebra de Weber, le Modern Algebra de van der Waerden, le Lattice Theory (2e éd.) de Birkhoff, les traités d'algèbre générale ou universelle de Cohn, Kurosh, Grätzer. Le prolongement de ce développement trouve son expression naturelle dans la théorie des modèles dont les deux théorèmes fondamentaux sont le théorème de complétude du calcul des prédicats et le théorème d'interpolation de Craig.

3. L'analyse classique est renouvelée par l'analyse non standard qui s'appuie sur la théorie des modèles.

4. La découverte d'un explicatum précis (fonction récursive générale) pour l'explicandum "fonction effectivement calculable" ⁽⁸⁾, a permis une théorie particulière (Gödel) et une théorie générale (Tarski, Kleene) de l'indécidabilité.

5. Les contradictions de la théorie des ensembles demandent une révision du point de vue naïf.

Les considérations précédentes contiennent les grandes lignes d'un programme de cours au niveau universitaire pour les mathématiciens et l'on peut affirmer sans crainte qu'un étudiant possédant une telle formation est apte à entreprendre des études graduées et à étudier des sujets plus poussés de théorie des modèles (e.g. résultats de Morley), de théorie des ensembles (e.g. indépendance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu), de théorie des fonctions récursives (e.g. la méthode de priorité de Friedberg - Mučnik), de théorie de la preuve (e.g. non-contradiction de l'arithmétique) etc.

bibliographie

- [1] Bar-Hillel, Y. - A neglected recent trend in logic
Logique et Analyse vol. 10 p. 235-238 (1967)
- [2] Coole, W.Q. - Do we need a logic course for freshmen?
Dans "Improving College and University teaching" Corvallis,
Oregon (1959)
cf. JSL XXIV 86 (1959)
- [3] Henkin, L. - Mathematics and logic
Proc. Fifth. Can. Math. Cong. Toronto (1963)
- [4] Rescher, N. - Recent developments and trends in logic
Logique et Analyse vol. 9 p. 269-279 (1966)
- [5] - Topics in philosophical logic. Reidel (1968)
- [6] Suszko, R. et autres - (revue par Mostowski dans JSL XXVII p. 224 (1962))

- [7] Tarski, A. - Logic, semantics and metamathematics. Oxford. (1956)
- [8] Vojsvillo, Kuznecov, Lahuti et Finn - Urgent problems of scientific research and educational work in the field of logic (1959)
cf. JSL XXVII 75 (1962).

notes

- (¹) Voici trois exemples d'inférences: (a) Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel. (b) Tous les enfants aiment attirer l'attention. Jean est un enfant. Donc Jean aime attirer l'attention. (c) Tous les artistes sont égoïstes. Quelques miséreux sont artistes. Donc quelques miséreux sont égoïstes. Les deux premières sont de même forme mais la troisième est d'une forme différente de celles des deux autres.
- Pour les nombres entre crochets comme [4] se reporter à la bibliographie à la fin de l'article. Une référence comme JSL XXIV 86 (1959) doit être interprétée comme une abréviation pour "Journal of Symbolic Logic, Volume XXIV, p. 86, (1959)".
- (²) Ces calculs logiques peuvent ou non être accompagnés d'interprétations.
- (³) Ces théories peuvent être formalisées ou non et avoir un ou plusieurs modèles.
- (⁴) Finitiste ou non.
- (⁵) Voir aussi [5]. Dans [1], [4] et [5] on trouvera une bibliographie de quelques-uns des principaux livres portant sur chacune des branches mentionnées.
- (⁶) Ces opinions de Grzegorzczyk datent de 1955 (cf. [6].)
- (⁷) On trouvera dans cet article un exposé des premiers résultats sur les logiques multivalentes.
- (⁸) Ce phénomène doit être mis en parallèle avec la découverte de l'explicitum de fonction continue par les ϵ - δ pour l'explicitandum "fonction continue".