Rétrospectives . . .

Rédacteur : Jean-Paul Collette, Université du Québec à Montréal

ESQUISSE HISTORIQUE DU CONCEPT DE NOMBRE
(deuxième partie)

EVOLUTION HISTORIQUE DE CERTAINS NOMBRES.

Le nombre naturel élément de l'ensemble $\{1,2,3,\ldots\}$ apparaît possiblement au tout début de la Genèse des nombres, par suite du caractère naturel qui lui est propre. Dès l'apparation de la "correspondance une à une" le prolongement qui suit débouche possiblement sur la représentation 1, 2, 3, ... Cependant chaque civilisation n'interprète pas ces nombres de la même manière: chez les Grecs le symbole "1" ne représente pas le nombre un car pour eux le nombre un est l'unité qui engendre le nombre. En particulier Euclide définit le nombre comme "une quantité faite d'unités", et plusieurs écrivains du Moyen Age pensent comme Euclide. Au XVI^{e} siècle le problème d'existence du nombre un fait l'objet de discussions nombreuses, et à la fin du siècle tous semblent l'accepter une fois pour toutes.

Le nombre zéro, symbolisé dans notre système par "0", a présenté des difficultés nombreuses pour les mathématiciens anciens. Historiquement, le symbole "0" (ou tout autre utilisé) possède une valeur de position avant d'exprimer la valeur numérique zéro. De nombreux exemples existent pour appuyer ce fait. Dans le système sexagésimal babylonien (type positionel), la position occupée par le zéro (ils ne possèdent pas en général de symbole pour le nombre zéro) correspond à une place vide. Ainsi le nombre $\triangleleft\,\triangledown$ ($\triangleleft$: dix, $\triangledown$: un) peut vouloir dire: 11 ou $11\cdot60$ ou $11\cdot60^2$, etc., puisque la place vide n'est pas signifiée.

Par contre chez les Mayas[1] le symbole "  " est utilisé pour occuper la position détenue par le nombre zéro. Le nombre $6 \times (20)^4 + 5 \times (20)^3$ possède la représentation  qui se lit verticalement:

 $6 \times (20)^4$ où $=1$

 $=5$

 $5 \times (20)^3$ où  $= 0$

(le système utilisé ici est le système du peuple et ne doit pas être confondu avec celui des prêtres).

Le nombre zéro fut possiblement reconnu comme "nombre" par les mathématiciens de l'Inde et les Arabes entre 500 et 1100 ap. J.-C. Son origine provient de certaines observations faites d'une part sur la solution des équations de la forme $ax^2 - bx = 0$ et d'autre part d'une étude plus poussée des propriétés des nombres.

En particulier les mathématiciens de l'Inde, Brahmagupta (628 ap. J.-C.) Mahavira (850 ap. J.-C.) et Bhaskara (XII^e siècle) énoncent plusieurs propriétés du nombre zéro tout en affirmant des énoncés faux parfois. Pour un, Brahmagupta affirme que $0 \div 0 = 0$ et Bhaskara affirme que l'expression $3 \div 0$ représente une quantité infinie par contre $(a \div 0) \cdot a = a$. Il faudra attendre l'introduction des mathématiques arabes en Occident pour assister à son développement et à une meilleure compréhension du nombre zéro.

Les mathématiciens anciens (surtout les grecs) développèrent des classifications diverses des nombres: nombres pairs, impairs, premiers, parfaits, abondants, déficients, amicaux, etc...

---

(1) J.K. Bidwell :Mayan arithmetic, Mathematics Teacher, vol. 60, pp. 762-768.
A.W. Richardson:The number system of the Mayas, American Mathematical Monthly, vol. 40, pp. 542-546.

L'origine du nombre négatif par opposition à la suite $\{1,2,3,\ldots\}$ semble prendre naissance en Chine par le biais de la "soustraction".

Les chinois utilisent des baguettes de couleurs différentes pour représenter les nombres négatifs et les nombres positifs. Par contre, ils refusent d'accepter le nombre négatif comme solution possible aux équations. En Occident, Diophante (mathématicien grec du III^e siècle ap. J.-C.) mentionne que l'équation $4x+20=4$ doit être considérée comme "impossible" parce qu'elle admet la solution $x=-4$. Chez les Grecs, le nombre négatif est inexistant, mais ils connaissent certaines lois comme: $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

Dans les travaux de Brahmagupta, nous trouvons les expressions: "quantités positives" et "quantités négatives" ainsi que plusieurs règles sur les signes. Les Arabes acceptent l'opération "soustraction", mais refusent la solution négative.

En Italie, au XIII^e siècle, Fibonacci emprunte dans son fameux Liber Abaci les idées arabes sur les règles des signes et interprète parfois dans les problèmes commerciaux une perte comme un nombre négatif.

Dès le XVI^e siècle, plusieurs mathématiciens étudient l'existence du nombre négatif: mentionnons Cardan (Italie), Stifel (Allemagne), Bombelli (Italie) et plusieurs autres.

Au XVII^e siècle, le nombre négatif possède sa place dans l'ensemble des nombres connus.

Rationnel

Le nombre rationnel apparaît à la fois chez les civilisations égyptiennes et babylonniennes sous la forme de fractions positives. Chez les Egyptiens, les fractions (en général) sont exprimées avec le numérateur égal à un. Pour un Egyptien, la fraction 2/7 est exprimée sous la forme $\frac{1}{28} + \frac{1}{4}$. Pour l'habitant de la Perse, la fraction est obtenue par la multiplication du réciproque et s'exprime surtout sous la forme décimale. Il est clair que tout nombre de la forme p/q où p et q entiers positifs ($q \neq 0$) est utilisé par les Anciens. Les Grecs acceptent le nombre rationnel lorsqu'il provient du quotient de deux nombres naturels. Les Romains utilisent les fractions avec le dénominateur égal à 12 dans les échanges commerciaux. Il faudra attendre le développement du nombre négatif avant de parler du nombre rationnel tel qu'il fut défini au XIX^{e} siècle. Par contre, le développement de la fraction décimale est essentiellement un produit européen dont l'origine remonte au XVI^{e} siècle avec Adam Riese (1522), Rudolff (1530) et surtout Simon Stevin (1585).

Irrationnel

La découverte du nombre irrationnel par les Grecs vers le IV^{e} siècle av. J.-C. fut pour eux une découverte pénible. Cette découverte détruisait leur théorie des proportions:

> "Deux segments sont commensurables (comparables) s'il existe un segment qui mesure les deux segments de telle manière que ce segment soit contenu un nombre entier de fois dans chacun".

Si deux segments sont tels qu'il est impossible de les comparer (en nombre entier de fois) nous obtenons l'incommensurabilité. Par exemple les segments qui représentent le nombre un et le nombre $\sqrt{2}$ sont incommensurables. Cette incommensurabilité va engendrer, après les Grecs, le concept de nombre irrationnel. Cependant la dévouverte de segments incommensurables permet à Eudoxe (370 av. J.-C.) de fonder une nouvelle théorie des proportions (qui ne tient pas compte de la commensurabilité) qu'on retrouve dans le livre V des "Eléments" d'Euclide. Durant tout le Moyen Age et jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle, le nombre irrationnel apparaît sous la forme de radicaux, et dans les méthodes d'approximation des racines carrées. Avec les contributions fondamentales de Georg Cantor et Richard Dedekind (1831-1916) une définition du nombre irrationnel voit le jour.

Réel

Le concept du nombre réel est exclusivement un produit de la fin du XIX^{e} siècle. Vers 1830, Bernhard Bolzano (1781-1848) fit une tentative pour développer une théorie des nombres réels(2). Cependant son ouvrage fut ignoré pour être redécouvert en 1962 seulement. A la suite de travaux de Karl Weierstrass (1815-1897) et Georg Cantor, Richard Dedekind débuta ses recherches sur les nombres irrationnels dès 1858 et réussit à définir le nombre réel par la notion de "coupures". Pour toute division des nombres en deux classes A et B telle que chaque élément de A est plus petit que chaque élément de B, il existe un et un seul nombre réel qui produit la "coupure". La coupure peut être un nombre rationnel ou irrationnel.

Bertrand Russel, au début du siècle, proposa une modification à la coupure de Dedekind qui consiste à utiliser une seule des deux classes comme définition du nombre réel. Des travaux plus récents révèlent une approche différente en utilisant une suite de "segments emboîtés" pour définir le nombre réel.

Complexe

Le concept de nombre complexe est définitivement conçu vers 1800 avec une représentation géométrique adéquate. L'existence du nombre complexe est liée historiquement à l'acceptation ou le refus de permettre la racine carrée d'un nombre négatif. Dès l'époque grecque on rencontre l'existence, chez Héron d'Alexandrie (1er siècle ap. J.-C.), d'une expression renfermant la racine carrée d'une différence négative. De même, chez Diophante, on constate dans sa résolution des équations la présence de quantités négatives sous un radical et pour lesquelles on affirme qu'un nombre négatif ne peut avoir de racines carrées.

---

(2) Darel RYCHLIK : La théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano, Revue d'histoire des sciences et leurs applications, vol. 14 (1961).

Avant le XVI^{e} siècle en Europe les écrivains en mathématiques rejettent, dans l'ensemble, les imaginaires parce qu'ils sont considérés comme impossibles.

Girolamo Cardano (1501-1576) prend le taureau par les cornes et accepte d'opérer dans la résolution des équations cubiques, lorsqu'il est en présence de quantités imaginaires. Il montre en particulier que les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ satisfont à son problème célèbre de diviser 10 en deux parties de telle manière que leur produit soit 40. Il admet évidemment que le problème est impossible mais il opère formellement. La décision prise par Cardan d'opérer formellement fut poursuivie chez plusieurs mathématiciens: Rafael Bombelli (XVI^{e} siècle) continue les travaux de Cardan et utilise $\sqrt{-1}$; René Descartes (XVII^{e} siècle) parle des termes "réel" et "imaginaire" ; Léonard Euler (XVII^{e} siècle) pose $i = \sqrt{-1}$ et Carl Friedrich Gauss (XIX^{e} siècle) a introduit le terme "nombre complexe".

La représentation graphique du nombre complexe fut l'oeuvre de plusieurs mathématiciens entre autres: John Wallis (XVII^{e} siècle), Jean Robert Argand (XIX^{e} siècle), Gauss (XIX^{e} siècle).

Aujourd'hui nous avons développé les différents systèmes de nombres en utilisant la notion de structure. Il est clair que le passage du nombre naturel au nombre complexe de la forme $a + bi$ où a,b sont des nombres réels se fait par extension successive ou continue. Nous parlons du "corps" des nombres réels, de l'"anneau" des entiers relatifs plutôt que de l'individu nombre. Nous pensons en termes d'ensembles plutôt que de discourir au niveau des éléments.