Solution (*Suite et fin*)

Concours de l'AMQ

6. Supposons qu'au contraire $k < 2^{n-1}$. Il reste alors plus de 2^{n-1} sous-ensembles de S autres que les A_i (en effet $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$) parmi lesquels il y aura au moins une paire d'ensembles complémentaires A et A'. (En effet chaque sous-ensemble détermine un complémentaire, ce qui divise S en deux parties égales de sous-ensembles). Alors A ou A' rencontre tous les A_i. En effet, si par exemple A n'intersecte pas, disons, A_1 alors $A' \supset A_1$ et $A_2, \ldots, A_k$ ont une intersection non-vide avec A_1 laquelle intersection se trouve alors dans A'. Donc A' intersecte tous les A_i. Mais ceci contredit la dernière hypothèse du problème. Par un raisonnement semblable, on peut montrer qu'il est contradictoire de supposer $k > 2^{n-1}$. Ainsi $k = 2^{n-1}$

Solution

CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

1. En effet,
$$\begin{aligned} 2(c+a)(c+b) &= 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a^2+b^2) + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 . \end{aligned}$$

2. Supposons $\angle C$ plus grand que $\angle A$ et considérons un point D tel que C soit entre les points A et D . Soit E, un point du même côté de AD que B, tel que $\angle DCE$ soit congru à $\angle ACB$ (voir figure 1). Remarquons que les demi-droites AB et CE ne sont pas parallèles, le triangle ABC n'étant pas isocèle. Notons X le point d'intersection de AB et CE et notons Y le point de BC tel que C est entre B et Y et CX = CY. Alors X appartient à la droite AB, Y appartient à la droite BC et ces points sont symétriques par rapport à la droite AC; en effet, le triangle YCX est isocèle, ainsi AC, la bissectrice de $\angle YCX$ est la médiatrice du segment XY.

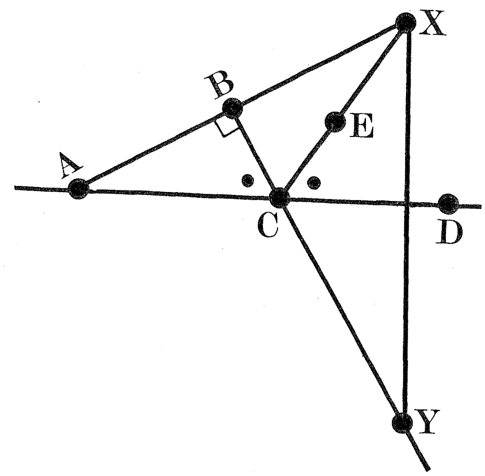

Figure 1

3. Soit O le centre du carré ABCD (voir figure 2). D'après l'hypothèse donnée, soit M le point tel que la somme des distances de M à A, à D et à O soit minimum. De même, soit N tel que la somme des distances de N à B, à C et à O soit minimum. On vérifie que le triangle AMD est isocèle et que la longueur des segments MA et MD est $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et que celle du segment MO est $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

Donc par symétrie, la longueur totale est

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\sqrt{3}+1).$$

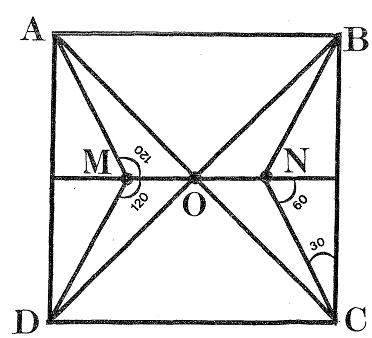

Figure 2

4. Si les mesures des côtés de l'angle droit du triangle sont notées a, b et si h désigne la hauteur du triangle relative à l'hypothénuse, alors (similitude de triangles)

$$\frac{h}{a} = \frac{b}{c} \quad \text{d'où} \quad h = \frac{ab}{c} .$$

Si c est premier et h entier, c doit diviser a ou c doit divis er b; mais $c > a$ et $c > b$ ce qui est contradictoire.

5. Si on considère des rectangles de mesures entières alors le nombre z de rectangles de surface n est exactement le nombre de diviseurs de n .

Si $p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} = n$ est la décomposition de n en facteurs premiers (où k_i représente la multiplicité du facteur premier p_i) alors le nombre de diviseurs de n est $z = (k_1+1)\ldots(k_r+1)$.

Pour $z = 12$ on a:

$$\begin{aligned} 12 &= 12.1 = (11+1)(0+1) \\ &= 6.2 = (5+1)(1+1) \\ &= 4.3 = (3+1)(2+3) \\ &= 3.2.2 = (2+1)(1+1)(1+1) \end{aligned}$$

Par suite on a les nombres n correspondants:
$2^{11}.3^0 = 512$, $2^5.3^1 = 96$, $2^3.3^2 = 72$, $2^2.3^1.5^1 = 60$ en choisissant les plus petits nombres premiers p_i . Visiblement 60 est le plus petit des n .

6. Choisissons un point P tel que P soit
1) hors du cercle
2) non sur une droite définie par deux des $2n$ points donnés.
Menons de P les tangentes t_1 et t_2 au cercle. Si on fait tourner la tangente t_1 autour de P de façon à amener t_1 sur t_2 en parcourant les points du cercle, on rencontrera isolément chacun des $2n$ points donnés; il suffira de s'arrêter après avoir rencontré le $n^{\text{ième}}$ point et avant d'avoir rencontré le $(n+1)^{\text{ième}}$ point. (On peut utiliser un argument analogue en considérant un faisceau de droites parallèles avec une direction différente des directions définies par deux des $2n$ points donnés).

(suite à la page 40)

(suite de la page 34)

7. 80% ont perdu un bras est équivalent à 20% ont conservé leurs deux bras. De même 30% ont conservé leurs jambes et 45% ont conservé leurs yeux. 20% + 30% + 45% = 95% au plus ont donc conservé soit leurs bras, soit leurs jambes, soit leurs yeux. Par suite au moins 5% ont perdu un bras, une jambe et un oeil.

8. L'hypothèse a) entraîne que les carrefours C_5, C_8, C_{10}, C_{11}, C_{13} et C_{14} ne sont pas des postes de péage. L'hypothèse b) entraîne que les carrefours C_4, C_6, C_7, C_9, C_{12} sont des postes de péage; par a), C_3 n'est pas un poste de péage; par b), C_2 est un poste de péage et finalement par a), C_1 n'est pas un poste de péage. On obtient finalement que les carrefours C_1, C_3, C_5, C_8, C_{10}, C_{11}, C_{13}, C_{14} ne sont pas des postes de péage; qu'aux carrefours C_2, C_6, C_9, C_{12} on paie un dollar; qu'en C_4 on paie deux dollars et qu'en C_7 on paie trois dollars.