ne approche unifiée
quelques théorèmes
l'analyse

par Raymond LEBLANC
département de mathématique
Université du Québec à Trois-Rivières

Nous nous proposons dans cet article de présenter un bon nombre de résultats généralement traités dans un premier cours de "calcul". La méthode que nous emploierons permettra de ramener à une même forme de raisonnement les démonstrations des théorèmes de la valeur intermédiaire, de la valeur moyenne, de Heine-Borel, de Bolzano-Weierstrass, etc.

Préliminaires

Pour être en mesure de suivre le développement, le lecteur devra être familier avec la notion de relation transitive et les théorèmes suivants:

(a) Pour une fonction réelle f continue au point x, il existe un voisinage V_x (connexe) de x et une constante $M_x > 0$ tels que

$$\forall y \in V_x \; : \; |f(y)| \leq M_x .$$

(b) Pour une fonction réelle f continue au point x, et telle que $f(x) > 0$, il existe un voisinage V_x (connexe) de x tel que

$$\forall y \in V_x \; : \; f(y) > 0.$$

(c) [Complétion des réels]. Tout sous-ensemble non vide $S \subseteq \mathbb{R}$, borné supérieurement admet une plus petite borne supérieure, i.e. sup S existe.

Théorème fondamental

<u>Hypothèses</u>: i) R est une relation transitive sur $[a,b]$, $a < b$.

ii) Pour tout $x \in [a,b]$, il existe un voisinage V_x de x tel que

$$\forall u \in [a,x] \cap V_x \; , \forall v \in [x,b] \cap V_x \; : \; u \, R \, v.$$

<u>Conclusion</u>: a R b.

Preuve: Posons $S=\{x \mid x \in [a,b]$ et $a\ R\ x\}$. S est un sous-ensemble de $[a,b]$, donc borné. S est non vide car par ii) il existe un voisinage V_a tel que

$$u=a \in [a,a] \cap V_a \quad \text{et} \quad v=a \in [a,a] \cap V_a,$$

d'où $a\ R\ a$ i.e. $a \in S$. On peut donc poser $\sup S = c \leq b$. Soit V_c un voisinage de c contenant $[c-\delta\ ,\ c+\delta]$ pour un certain $\delta > 0$. Ainsi $c-\delta$ n'est pas une borne supérieure de S, ce qui entraîne qu'il existe un $u_0 \in S$ tel que $c \geq u_0 \geq c-\delta$. Ainsi

$$u_0 \in [a,c] \cap V_c. \tag{1}$$

Maintenant supposons que $b \notin V_c$, d'où $c < b$, alors, en posant $v = c + \delta$, $v \in [c,b] \cap V_c$. (2)

(1) et (2) entraînent que $u_0\ R\ v$. De plus, $a\ R\ u_0$ puisque $u_0 \in S$. Puisque R est transitive, on en déduit $a\ R\ v$, d'où $c + \delta \in S$ ce qui est impossible puisque $c = \sup S$ (contradiction). On doit donc admettre que $b \in V_c$ et ainsi $b \in [c,b] \cap V_c$. (3)

Combinant (1) et (3), on a

$$a\ R\ u_0 \quad \text{et} \quad u_0\ R\ b, \text{ d'où } a\ R\ b$$

C.Q.F.D.

Corollaire 1

L'image d'un intervalle fermé et borné $[a,b]$ par une fonction continue f est bornée.

Si l'on peut appliquer le résultat précédent à la relation: $u\ R\ v \Longleftrightarrow$ f est bornée sur $[u,v]$, on pourra conclure $a\ R\ b$, c'est-à-dire que f est bornée sur $[a,b]$ et le corollaire 1 sera démontré. Il suffit donc de s'assurer que cette relation vérifie les hypothèses i) et ii). D'abord,

i) R est transitive: si $u\ R\ v$ et $v\ R\ w$, alors f est bornée sur $[u,v]$ et sur $[v,w]$, d'où f est bornée sur $[u,w]$, i.e. $u\ R\ w$.

ii) Si $x \in [a,b]$, f étant continue au point x, alors il existe un voisinage V_x tel que $\forall y \in V_x : |f(y)| \leq M$.

Ainsi pour tous $u \in [a,x] \cap V_x$ et $v \in [x,b] \cap V_x$, on a $[u,v] \subseteq V_x$, d'où f est bornée sur $[u,v]$, i.e. $u \, R \, v$.

Ainsi i) et ii) entraînent $a \, R \, b$: f est bornée sur $[a,b]$.

Corollaire 2 (Théorème de la valeur intermédiaire)

Si f est continue sur $[a,b]$ et si t est (strictement) entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un $c \in (a,b)$ tel que $f(c)=t$.

<u>Preuve</u>. Supposons la conclusion fausse: $f(x) - t \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
Posons $u \, R \, v \Longleftrightarrow f(u) - t$ et $f(v) - t$ sont de même signe.

i) On vérifie aisément que cette relation est transitive.

ii) Pour $x_0 \in [a,b]$, $f(x) - t$ est continue au point x_0 et $f(x_0) - t > 0$ (ou bien $f(x_0) - t < 0$). Ainsi, il existe un voisinage V_{x_0} tel que $f(x) - t$ est positif (resp. négatif) sur V_{x_0}. Alors pour tous $u \in [a,x_0] \cap V_{x_0}$ et $v \in [x_0,b] \cap V_{x_0}$, $f(u) - t$ et $f(v) - t$ sont de même signe et ainsi $u \, R \, v$.

On peut donc conclure $a \, R \, b$, i.e. $f(a) - t$ et $f(b) - t$ sont de même signe, ce qui est contraire à l'hypothèse! Le corollaire est démontré.

Corollaire 3 (Théorème de la valeur moyenne)

Si f est différentiable sur $[a,b]$ et si $m < f'(x) < M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $m(b - a) < f(b) - f(a) < M(b - a)$.

<u>Preuve</u>. Définissons la relation suivante sur $[a,b]$:
$u \, R \, v \Longleftrightarrow u=v$ ou bien $m(v - u) < f(v) - f(u) < M(v - u)$.

i) On vérifie aisément que R est transitive.

ii) Soit $x \in [a,b]$. Puisque

$$m < \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) < M,$$

il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$m < f'(x) - \epsilon < f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) < f'(x) + \epsilon < M.$$

Pour cet ϵ, il existe un $\delta(\epsilon)$ tel que

$$0 \leq |y - x| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow m < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < M.$$

En posant $V_x = \{y \mid |y - x| < \delta(\epsilon)\}$, on aura

$$\forall u \in [a,x] \cap V_x : m < \frac{f(u) - f(x)}{u - x} < M \quad \text{pour } x \neq u,$$

$$\forall v \in [x,b] \cap V_x : m < \frac{f(v) - f(x)}{v - x} < M \quad \text{pour } x \neq v.$$

En tenant compte de $u - x < 0$ et $v - x > 0$, on a
(1) $m(v - x) < f(v) - f(x) < M(v - x)$ et
(2) $M(u - x) < f(u) - f(x) < m(u - x)$.

Soustrayant (2) de (1), on a
$m(v - u) < f(v) - f(u) < M(v - u)$, pour $u \neq v$.

On peut donc conclure pour tous $u \in [a,x] \cap V_x$ et
$v \in [x,b] \cap V_x$, on a $u = v$ ou bien
$m(v - u) < f(v) - f(u) < M(v - u)$. Donc $u \, R \, v$.

On peut alors appliquer ici le théorème fondamental pour conclure $a \, R \, b$: $a = b$ ou bien
$m(b - a) < f(b) - f(a) < M(b - a)$.

Or on sait que $a \neq b$, d'où la conclusion suit:

$$m(b - a) < f(b) - f(a) < M(b - a).$$

Corollaire 4 (Théorème de Heine-Borel)

Tout recouvrement de $[a,b]$ par des ouverts admet un sous-recouvrement fini.

En posant $u \, R \, v \Longleftrightarrow [u,v]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement, puis en appliquant le théorème fondamental, on obtient ce résultat.

Corollaire 5 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Si $S \subseteq [a,b]$ est un sous-ensemble sans point d'accumulation, alors S est un ensemble fini.

On obtient ce résultat en posant

$$u \mathrel{R} v \Longleftrightarrow [u,v] \cap S \text{ est fini.}$$

Corollaire 6 (Théorème de Cantor)

Si F_n est une suite décroissante de sous-ensembles fermés contenus dans $[a,b]$ telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, alors il y a au moins un ensemble de la suite qui est vide.

On obtient ce résultat en posant

$u \mathrel{R} v \Longleftrightarrow$ il existe un n tel que $[u,v] \cap F_n$ est vide.

Nous pourrions certes prolonger cette liste mais il nous semble (du moins, nous l'espérons) que nous avons suffisamment illustré les utilisations de ce théorème fondamental pour que le lecteur constate l'économie de réflexion qu'il permet. L'avantage pédagogique de cette approche est de porter la difficulté de compréhension sur un seul théorème et d'obtenir plusieurs résultats classiques en appliquant toujours le même raisonnement.

BIBLIOGRAPHIE

1 L. BERS, "On avoiding the mean value theorem", American Mathematical Monthly, vol. 74 (1967), p. 583.

2 R.M.F. MOSS and G.T. ROBERTS, "A creeping lemma", American Mathematical Monthly, vol. 75 (1968), pp. 649-652.