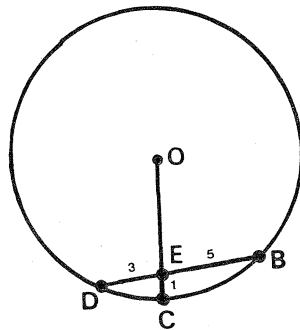


Troisième olympiade canadienne
de mathématiques

1971

1. La corde DEB d'un cercle est telle que $DE=3$ et $EB=5$. Soit O le centre du cercle. On trace le segment de droite OE et on le prolonge jusqu'au point C de rencontre avec le cercle (voir la figure). Si $EC=1$, trouver le rayon du cercle.



2. Soient x et y deux nombres réels positifs tels que $x+y=1$.
Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

3. Le quadrilatère $ABCD$ est tel que $AD=BC$. Si l'angle ADC est plus grand que l'angle BCD , démontrer que $AC > BD$.
4. Déterminer tous les nombres réels a tels que les polynômes x^2+ax+1 et x^2+x+a ont au moins une racine commune.

5. Soit

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

un polynôme à coefficients a_j entiers. Si $p(0)$ et $p(1)$ sont tous deux impairs, montrer que $p(x)$ n'a pas de racines entières.

6. Montrer que, pour tout entier n , l'entier $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.

7. Soit n un nombre à cinq chiffres (dont le premier n'est pas zéro) et soit m le nombre à quatre chiffres obtenu en retranchant de n le chiffre du centre. Déterminer tous les n tels que n/m est un entier.

8. Un polygone régulier est inscrit dans un cercle de rayon r . Soit P un point quelconque à l'intérieur du polygone. De P on abaisse des perpendiculaires aux côtés du polygone ou à leurs prolongements.

a) Démontrer que la somme des longueurs de ces perpendiculaires est constante.

b) Exprimer cette valeur constante à l'aide du rayon r .

9. Deux mâts, de hauteurs h et k , sont érigés sur une surface plane à une distance $2a$ l'un de l'autre. Trouver l'ensemble de tous les points de la surface pour lesquels les angles d'élévation des sommets des deux mâts sont égaux.

10. On suppose que n personnes possèdent chacune exactement une information et que ces n informations sont toutes différentes. Chaque fois qu'une personne "A" téléphone à une personne "B", "A" communique à "B" tout ce qu'elle sait, tandis que "B" ne révèle rien à "A". Quel est le nombre minimum d'appels téléphoniques entre deux personnes qui est nécessaire pour que chacune sache tout? Démontrer que votre réponse est bien un minimum.