(Cette chronique a pour but de présenter des sujets variés de l'arbre des mathématiques, sous forme d'exemples simples et de questions intégrées au texte, de façon à mettre en évidence des résultats mathématiques fondamentaux).

Quelques problèmes élémentaires en géométrie et en théorie des nombres

par Gilbert Labelle,
département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

Ce court exposé est un résumé partiel d'une conférence donnée en septembre dernier par le professeur Paul Erdős de l'Académie des Sciences de Hongrie. Le professeur Erdős est bien connu dans tous les domaines mathématiques à cause de ses nombreux travaux de premier ordre dans les spécialités les plus variées.

Problèmes de géométrie

1. Considérons les ensembles finis A de n points dans le plan. Posons-nous la question suivante: combien un ensemble A détermine-t-il de distances différentes? Plus précisément: quel est le plus grand entier f(n) tel que n points distincts du plan déterminent toujours au moins f(n) distances distinctes?

On voit aisément que $f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$, $f(6) = f(7) = 3$. P. Erdős [1] a démontré l'estimation

$$\sqrt{n-1} - 1 < f(n) < \frac{c_1 n}{\sqrt{\log n}} \qquad (1)$$

pour une certaine constante c_1.

L. Moser [2] a raffiné la borne inférieure dans (1) en obtenant

$$\frac{n^{2/3}}{2.(9^{1/3})} - 1 < f(n) \qquad (2)$$

et ce résultat est le meilleur connu à date.

On conjecture que l'ordre de grandeur du membre de droite de (1) est le meilleur possible et qu'il existe au moins un des n points, disons x_i, pour lequel on ait au moins $c_2 n/\sqrt{\log n}$ nombres distincts parmi les distances $d(x_i, x_j)$ où $1 \leq j \leq n$ et où c_2 est une certaine constante.

2. Supposons maintenant que les points du plan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient les sommets d'un polygone <u>convexe</u> à n côtés. E. Altman [3] a démontré que ces points déterminent au moins $\left[\frac{1}{2}n\right]$ distances distinctes. Ce résultat avait été conjecturé par P. Erdős [1] et c'est le meilleur possible comme on le voit en considérant un n-gone régulier.

Voici une autre conjecture de Erdős. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les sommets d'un polygone <u>convexe</u> à n côtés. Il existe alors un x_i tel que les distances $d(x_i, x_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$ déterminent au moins $\left[\frac{1}{2}n\right]$ nombres distincts.

3. Soient encore $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts du plan. Quel est le nombre maximum $g(n)$ de couples (x_i, x_j) tels que $d(x_i, x_j) = 1$? P. Erdős [1] a démontré que l'on a

$$n^{1 + c/\log \log n} < g(n) < d \cdot n^{3/2} \qquad (3)$$

pour certaines constantes c et d.

Il semble que la borne inférieure de (3) soit du bon ordre de grandeur et on conjecture que $g(n)/n^{2/3} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. On démontre assez facilement que si on a cinq points non alignés trois à trois, alors il existe quatre de ces points qui déterminent un quadrilatère convexe. (La preuve en est laissée au lecteur).

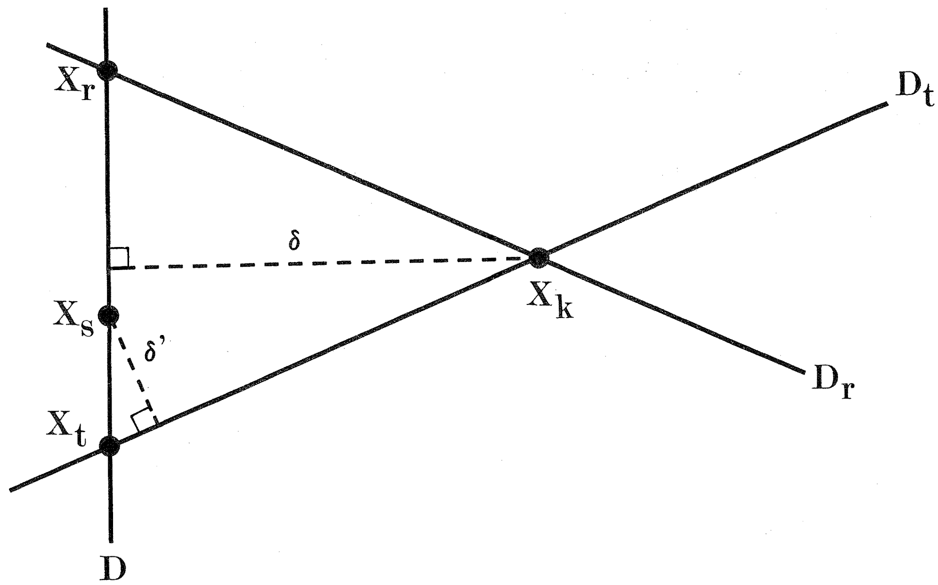
Miss Klein a posé le problème suivant: Quel est le plus petit nombre $k(n)$ tel que $k(n)$ points non alignés trois à trois déterminent nécessairement un polygone convexe à n côtés? Il est conjecturé que $k(n) = 2^{n-2} + 1$.
P. Erdős et l'auteur de la dernière conjecture ont démontré que

$$2^{n-2} < k(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} \quad \text{et} \quad k(5) = 9 \qquad (4)$$

5. Pour terminer cette série de problèmes géométriques, voici une vieille conjecture de Sylvester (1893) aïnsi qu'une solution extrêmement élégante de Kelley. Si $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas tous alignés, alors il existe une droite D contenant exactement deux des x_i.

Solution

Supposons le résultat faux. Alors toute droite déterminée par certains de ces points contient au moins trois points. Considérons la plus petite distance possible δ d'un point (parmi les x_i) à une droite (parmi les droites déterminées par les x_j). Par exemple, le point x_k est à distance δ de la droite D passant par x_r, x_s et x_t.



Il est alors immédiat que l'une au moins des droites D_r et D_t est à une distance δ' strictement plus petite que δ, d'où une contradiction.

Problèmes de théorie des nombres

1. Si on a n+1 nombres entiers positifs distincts bornés supérieurement par 2n:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq 2n , \qquad (5)$$

alors l'un de ces nombres en divise un autre.

Démonstration:

On vérifie aisément que tout nombre entier est ou bien impair ou bien produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2. Bref, si K est un nombre entier, alors il existe un nombre $\alpha \geq 0$ et un nombre m impair tels que $K = 2^{\alpha} \bullet m$. On a alors, pour chaque i, $a_i = 2^{\alpha_i} \bullet m_i$ où m_i est impair. Comme il y a n nombres impairs de 1 à 2n et qu'on a n+1 nombres m_i, deux des m_i sont donc nécessairement égaux, i.e. il existe des entiers r et s tels que $m_r = m_s = \sigma$, d'où l'un des nombres $a_r = 2^{\alpha_r} \bullet \sigma$ et $a_s = 2^{\alpha_s} \bullet \sigma$ divise l'autre.

Remarquons finalement que le nombre n + 1 ne peut se réduire à n comme le montre l'exemple suivant:

$$n + 1 < n + 2 < \dots < n + (n-1) \leq 2n \qquad (6)$$

2. Voici un problème analogue au précédent. Si on a $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 2n$ et qu'aucun des a_i n'en divise un autre, alors quelle est la plus petite valeur possible pour a_1?

La réponse est

$$\min a_1 = 2^k \text{ , où } 3^k < 2n < 3^{k+1} \tag{7}$$

Pour la démonstration voir la revue "L'Enseignement Mathématique" publiée à Genève.

3. (Problème.) Quelle est la plus grande valeur de m pour laquelle il existe des entiers positifs $a_1 < a_2 < \ldots < a_m \leq n$ tels que pour des indices i et j distincts, a_i et a_j sont relativement non premiers?

4. Les problèmes suivants concernent la possibilité de représenter des nombres comme sommes de puissances de 2. On remarque tout d'abord que les $k + 1$ nombres $1, 2, 2^2, \ldots, 2^k$ sont tels que toutes les sommes possibles de la forme

$$\sum_{i=0}^{K} \Omega_i 2^i \text{ , où } \Omega_i = 0 \text{ ou } \Omega_i = 1 \tag{8}$$

sont distinctes.

Est-il possible de trouver un entier k ainsi que $k + 3$ nombres a_i tels que $1 \leqslant a_0 < \ldots < a_{k+2} \leqslant 2^k$ et que toutes les sommes possibles de la forme

$$\sum_{i=0}^{K+2} \Omega_i 2^i \text{ , où } \Omega_i = 0 \text{ ou } \Omega_i = 1 \tag{9}$$

sont distinctes? Le cas de $k + 2$ nombres a_i a été étudié par certains auteurs et résolu partiellement.

Plus généralement, quelle est la valeur maximum $k(x)$ de k pour laquelle il existe un système de k nombres a_i tels que $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant x$ et tels que les sommes

$$\sum_{i=1}^{K} \Omega_i a_i \text{ (où } \Omega_i = 0 \text{ ou } \Omega_i = 1)$$

soient distinctes?

Conjecture (Erdös)

$$k(x) = \frac{\log x}{\log 2} + O(1) \qquad (10)$$

(La notation $O(1)$ est classique et représente une fonction quelconque bornée lorsque $x \longrightarrow \infty$).

5. (Problème). Quel est la valeur maximum $k(x)$ de k pour laquelle il existe un système de k nombres a_i tels que $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant x$ et tels que les sommes $a_i + a_j$ soient toutes distinctes, pour $i, j = 1, 2, \ldots, k$?

Conjecture (Turan, Erdös)

$$k(x) = \sqrt{x} + O(1) \qquad (11)$$

6. Soit $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ une suite croissante infinie d'entiers et soit $g(n)$ le nombre de solutions de l'équation $a_i + a_j = n$.

Conjecture (Turan, Erdös)

$$\left[(\forall n)\ (g(n) > 0)\right] \Longrightarrow \overline{\lim_{n \to \infty}}\ g(n) = \infty \qquad (12)$$

7. Il est à remarquer que le professeur Erdös offre \$250.00 à la personne qui pourra démontrer l'une quelconque des conjectures (10), (11) ou (12)!

REMARQUE FINALE

L'auteur du présent résumé désire faire remarquer que certains des problèmes précédents apparaissent comme des cas particuliers du problème suivant.

Soit X un ensemble et R une relation k-aire sur X (i.e. R est un sous-ensemble de $X \times X \times \ldots \times X = X^k$). Convenons de dire que $A \subseteq X$ est "comparabilisatrice" ssi $A^k \cap R \neq \emptyset$, c'est-à-dire ss'il existe des $a_1 \in A, \ldots, a_k \in A$ tels que $(a_1, \ldots, a_k)$ soit dans la relation R.

Problème: Etant donnée une relation k-aire R sur X, à partir de quel nombre $\lambda = \lambda(R)$ est-ce que

$$(\text{nombre d'éléments de } A) \geqslant \lambda \Longrightarrow A \text{ est comparabilisatrice?} \quad (13)$$

bibliographie

[1] P. Erdös, "On sets of distances of n points", American Mathematical Monthly, 53 (1946), pp. 248-250.

[2] L. Moser, "On the different distances determined by n points", American Mathematical Monthly, 59 (1952), pp. 85-91.

[3] E . Altman, "On a problem of P. Erdös", American Mathematical Monthly, 70 (1963), pp. 148-157.

errata

Monsieur Gilbert Labelle nous signale quelques corrections à faire concernant sa chronique "Ramifications Mathématiques" dans le Bulletin Vol. XII, numéro 2 (Hiver 70-71).

1° p. 55, ligne 3, changer $P_1 \longleftrightarrow P_2$ en $P_1 \Longleftrightarrow P_2$.

2° Dans le lemme 5, p. 58, remplacer le dernier facteur

$$\prod_{j\in} b_i \quad \text{par} \quad \prod_{j\notin S} b_j \quad .$$

3° Page 58, dernière formule, remplacer

$$\prod_{j\in S}(1+\epsilon_j) \quad \text{par} \quad \prod_{j\notin S}(1+\epsilon_j)$$

4° Même chose pour les formules (7) et (8) et ligne 2, page 59.

5° Formule (10), page 59, changer $\varsigma = \{S : \dots\}$ par $\hat{\varsigma} = \{S : \dots\}$