Le Coin du problème

Rédacteur: Gabriel Garneau, Ecole Polytechnique, Montréal.

CONCOURS DE PROBLÈMES

Les problèmes qui suivent font l'objet d'un concours auquel nous invitons tous nos lecteurs à participer. Les solutions reçues et jugées les plus intéressantes par leur originalité mériteront à leurs auteurs des prix sous forme de publications mathématiques. Faire parvenir vos solutions à Gabriel Garneau, département de mathématique, Ecole Polytechnique, 2500 avenue Marie-Guyard, Montréal 250, Québec.

PROBLÈME 1

Une conciergerie est habitée par des jeunes couples qui ont tous des enfants mais en nombres différents. Il y a plus de filles que de familles, plus de garçons que de filles et plus d'adultes que de garçons. Chaque fille a au moins un frère et au plus une soeur. De plus l'une des familles a plus d'enfants que toutes les autres réunies. Combien y a-t-il de familles et quelle est la répartition des enfants dans chacune d'elles ?

PROBLÈME 2

Trouver un carré parfait de quatre chiffres tel que si l'on écrit ses chiffres dans l'ordre inverse on obtient encore un carré.

PROBLÈME 3

Montrer que si n et $2n^4 + 33$ sont deux nombres premiers, alors $2n^4 - 33$ est également premier.

PROBLÈME 4

Montrer que si un multiple de 5 est décomposable en une somme de deux carrés, alors il en est de même pour le cinquième de ce nombre.

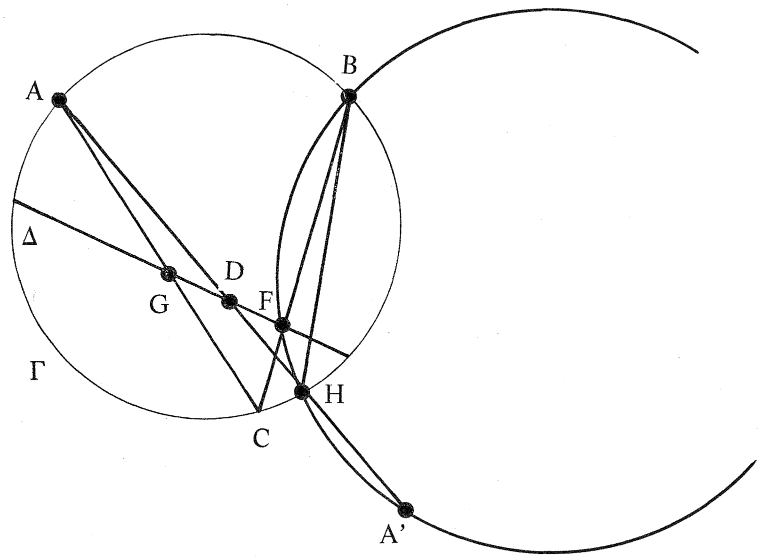
PROBLÈME 5

Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme des carrés soit un nombre de 4 chiffres identiques.

SOLUTIONS

Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro d'automne-hiver 1969 (volume XI, numéro 4).

PROBLÈME 1



Construisons A' le symétrique du point A par rapport au point D de la corde et appelons H le point d'intersection de la circonférence Γ avec la droite qui porte le segment AA'. Menons également la circonférence passant par les trois points B, H et A', laquelle coupe la corde Δ en un point F.

Le point C cherché est l'intersection de la circonférence Γ et de la droite qui porte le segment BF.

En effet appelons G le point d'intersection de Δ avec la corde AC. Il faut montrer que GD = DF. Il suffit de prouver l'égalité des triangles ADG et A'DF. Or AD = DA' par construction et les angles ADG et A'DF sont égaux comme opposés par le sommet. Il reste donc à montrer l'égalité des angles DAG et DA'F.

Puisqu'ils interceptent le même arc sur une circonférence, les angles ACB et AHB (respectivement A'HB et A'FB) sont égaux. On en déduit l'égalité des angles AHB et A'FC, donc aussi celle de ACB et A'FC. Par suite, AC et A'F sont parallèles, car elles forment avec la sécante CF des angles alternes-internes égaux.

D'où l'égalité des angles DAG et DA'F.

Remarque: La démonstration est sensiblement la même si le choix des points A et B et de la corde Δ fournit un point A' situé à l'intérieur de Γ.

PROBLÈME 2

Les seules solutions entières de $x^y - y^x = 1$ sont $x = 2$, $y = 1$ et $x = 3$, $y = 2$. *(La solution détaillée est omise ici.)*

PROBLÈME 4

Appelons p_n la probabilité d'obtenir n exactement. Cet événement peut se produire à condition qu'on ait obtenu au coup précédent $n-2$ ou $n-3$. On a donc $p_n = \frac{1}{2} p_{n-2} + \frac{1}{2} p_{n-3}$ ou $p_n - \frac{1}{2} p_{n-2} - \frac{1}{2} p_{n-3} = 0$.

Considérons maintenant la série $s(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots$ et son produit par $(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3)$:

$$s(x)\ (1 - \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^3) = p_0 + p_1 x + (p_2 - \tfrac{1}{2} p_0)\, x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (p_n - \tfrac{1}{2} p_{n-2} - \tfrac{1}{2} p_{n-3})\, x^n$$

On déduit que

$$s(x) = \frac{p_0 + p_1 x + (p_2 - \frac{1}{2} p_0)\, x^2}{1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3}.$$

Comme $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{2}$, alors

$$s(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3} = \frac{1}{(1 - x)\, [1 + \frac{1}{2} (1 + i) x]\, [1 + \frac{1}{2} (1 - i) x]}$$

d'où
$$s(x) = \frac{\frac{3-i}{10}}{1 + \frac{1}{2} (1 + i) x} + \frac{\frac{3+i}{10}}{1 + \frac{1}{2} (1 - i) x} + \frac{\frac{2}{5}}{1 - x}.$$

Or p_n est le coefficient de x^n dans $s(x)$, d'où

$$p_n = \frac{3-i}{10} \left[-\frac{1}{2} (1 + i)\right]^n + \frac{3+i}{10} \left[-\frac{1}{2} (1 - i)\right]^n + \frac{2}{5}$$

ou, après simplification,

$$p_n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{3 \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4}}{5}\right) + \frac{2}{5}.$$