Ramifications Mathématiques

(Cette chronique a pour but de présenter des sujets variés de l'arbre des mathématiques, sous forme d'exemples simples et de questions intégrées au texte, de façon à mettre en évidence des résultats mathématiques fondamentaux).

TABLEAUX PROPOSITIONNELS

par Gilbert LABELLE,
département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

1. FORMULES PROPOSITIONNELLES.

Le concept de formule propositionnelle a souvent été défini. Il est même en train d'envahir l'Elémentaire! Il nous suffira donc de rappeler qu'une formule propositionnelle (construite sur les propositions atomiques $p_1, p_2, \ldots, p_n$) est une expression finie obtenue en suivant les règles suivantes un nombre fini de fois:

(R_1) Chacun des p_i est une formule propositionnelle.

(R_2) Si P est une formule propositionnelle alors $\neg P$ est une formule propositionnelle ($\neg P$ se lit *"non* P").

(R_3) Si P_1 et P_2 sont des formules propositionnelles, alors $P_1 \wedge P_2$, $P_1 \vee P_2$, $P_1 \to P_2$, $P_1 \to P_2$ sont des formules propositionnelles. (Ces formules se lisent respectivement "P_1 *et* P_2", "P_1 *ou* P_2", "P_2 *si* P_1", "P_1 *si et seulement si* P_2".) Par exemple,

$$\neg \left[(p_1 \vee p_3) \wedge p_1 \right] \to \left\{ \left[p_4 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2) \right] \wedge \neg p_5 \right\} \qquad (1)$$

est une formule propositionnelle construite sur les propositions atomiques p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

Pour chacune des connexions $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$, il existe une "table de vérité"

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

et l'on peut, par usage répété de ces tables, construire une table de vérité pour n'importe quelle formule. Cela est bien connu. La valeur 0 signifie FAUX, la valeur 1 signifie VRAI.

Pour terminer, trois remarques:

Remarque 1. Il existe une autre connexion notée $\veebar$ et appelée *"ou exclusif"* et qui a comme table de vérité

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cette connexion sera utile plus loin.

Remarque 2. Si on ne distingue pas deux formules propositionnelles P_1 et P_2 ayant une même table de vérité, on dira qu'elles sont *logiquement équivalentes* et l'on écrira $P_1 \leftrightarrow P_2$. On a par exemple:

$$(p_1 \veebar p_2) \Leftrightarrow \neg (p_1 \leftrightarrow p_2).$$

Remarque 3. Si on travaille à une équivalence logique près, on peut représenter par 1 (resp. 0) toute formule propositionnelle dont la table de vérité ne présente que des 1 (resp. 0) dans la colonne de droite. Grâce à ces notations, les connexions $\wedge$ et $\veebar$ s'avèrent suffisantes pour exprimer toutes les formules propositionnelles. En effet, on vérifie que $\neg p \Leftrightarrow (1 \veebar p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow p \veebar q \veebar (p \wedge q)$, $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow 1 \veebar p \veebar (p \wedge q)$, $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow 1 \veebar (p \veebar q)$.

EXERCICE. Ecrire une formule logiquement équivalente à (1), mais ne comportant que les connexions $\wedge$ et $\veebar$.

2. TABLEAUX PROPOSITIONNELS.

On définit un *tableau propositionnel d'ordre n* comme étant une matrice de 2^n rangées et $(n + 1)$ colonnes, dont les entrées sont toutes 0 ou 1 et telle que la matrice obtenue en omettant la $(n + 1)^{\text{ième}}$ colonne donne la liste de tous les nombres entiers de 0 à $2^n - 1$ écrits dans la base 2 en ordre croissant. Ainsi les tables de vérité données dans la section 1 sont des tableaux propositionnels d'ordre 1 et 2.

La question suivante nous vient alors à l'esprit: *si à chaque formule propositionnelle correspond un tableau propositionnel, est-ce qu'à chaque tableau propositionnel il correspond une formule propositionnelle?*

Nous allons répondre affirmativement à cette question en donnant deux justifications, l'une pseudo-algébrique et l'autre purement algébrique, en faisant appel aux propriétés de l'anneau $\mathbb{Z}/2$(1).

3. LEMMES ET NOTATIONS UTILES

On appellera T_n l'ensemble des tableaux propositionnels d'ordre n et F_n l'ensemble des formules polynomiales à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ et dont les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}/2$. F_n est donc l'ensemble des sommes de produits de certains des x_i.

On notera $P(P(\mathbf{n}))$ l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbf{n} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

---

(1) *Rappel:* les éléments de cet anneau sont les *"entiers modulo 2"*, habituellement notés 0 et 1. La table d'addition se ramène à: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ et $0 + 1 = 1 + 0 = 1$; celle de multiplication se résume en: $0 . 0 = 0 . 1 = 1 . 0 = 0$ et $1 . 1 = 1$.

Par exemple, le tableau

1	2	3	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

(2)

est un élément de T_3. Par ailleurs, le polynôme $1 + x_1 x_2 + x_1 x_3 x_4 + x_5 + x_1 x_2 x_3$ est un élément de F_5. On a également

$$\{\phi, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\} \in P(P(\mathbf{4})).$$

DÉFINITION

Si U est un ensemble et si $X \subseteq U$, on pose

$$X_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin X \\ 1 & \text{si } x \in X. \end{cases}$$

Ceci revient à dire que $x \in X$ et $X_x = 1$ veulent dire la même chose.

RAPPEL. Soit A un anneau quelconque et I un ensemble fini d'indices, on désigne par

$$\sum_{i \in I} x_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} x_i$$

la somme et le produit des $x_i \in A$ lorsque i varie dans l'ensemble I. Par exemple,

$$\sum_{i \in I} x_i = x_1 + x_3 + x_5 + x_7, \text{ si } I = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Si $I = \phi$, on pose $\sum_{i \in I} x_i = 0$ et $\prod_{i \in I} x_i = 1$.

LEMME I. La table de vérité de $\veebar$ coïncide avec la table d'addition de $\mathbb{Z}/2$. La table de vérité de $\wedge$ coïncide avec la table de multiplication $\mathbb{Z}/2$.

(La démonstration est immédiate.)

Remarquons que ce lemme nous permet de réduire la question fondamentale posée dans la section 2 au problème de REPRESENTER CHAQUE ELEMENT DE T_n PAR UN ELEMENT DE F_n.

Par exemple, le quatrième tableau de la section 1 se représente par $1 \vee p_1 \vee (p_1 \wedge p_2)$, donc aussi par le polynôme $1 + x_1 + x_1x_2 \in F_2$.

LEMME 2. On considère le n-tuplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = \epsilon$, où $\epsilon_i = 0$ ou 1. Si on pose

$$x_i^{(\epsilon_i)} = \begin{cases} 1 + x_i & \text{si} \quad \epsilon_i = 0 \ (\text{modulo } 2) \\ x_i & \text{si} \quad \epsilon_i = 1, \end{cases} \tag{3}$$

alors

$$x_1^{(\epsilon_1)} . x_2^{(\epsilon_2)} \ldots x_n^{(\epsilon_n)} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_1 = \epsilon_1, x_2 = \epsilon_2, \ldots, x_n = \epsilon_n \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases}$$

(La démonstration est immédiate.)

THÉORÈME 1 *(représentation pseudo-algébrique des tableaux)*

Le tableau t d'ordre n

0	0	. . .	0	0	w(0,0, . . . , 0)
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
ϵ_1	ϵ_2		ϵ_{n-1}	ϵ_n	$w(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
1	1	. . .	1	1	w(1, 1, . . . , 1)

(4)

peut se représenter par la formule

$$\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in I} w(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_n)\, x_1^{(\epsilon_1)} . x_2^{(\epsilon_2)} \ldots x_n^{(\epsilon_n)}, \tag{5}$$

où I est l'ensemble de tous les n-triplets possibles de 0 et 1.

Démonstration: application directe du lemme 1.

La formule (5) est la solution classique du problème posé et nous montre qu'en utilisant (3), on arrive finalement à un polynôme de F_n. Toutefois, ce polynôme (i.e. solution algébrique) n'est pas explicitement donné. C'est le but des lemmes et de la section suivante de donner un polynôme explicite, solution du problème. Ces lemmes et cette section ne sont pas triviaux pour une première lecture.

LEMME 3. Il existe deux bijections naturelles β_1 et β_2

$\beta_1 : T_n \rightarrow P(P(\mathbf{n}))$ et $\beta_2 : F_n \rightarrow P(P(\mathbf{n}))$

définies par (cf. DEF. 1)

$$\beta_1\ (t) = \{ \epsilon \mid \epsilon \subset \{1, 2, \ldots, n\} \text{ et } w(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_n) = 1 \}$$

$$\beta_2\ (\varphi) = \{ S \mid S \subset \{1, 2, \ldots, n\} \text{ et le terme } \prod_{i \in S} x_i \text{ entre dans la formule } \varphi \}.$$

Démonstration (visuellement évidente si on examine les exemples suivants!) Si t est le tableau (2) alors

$$\beta_1\ (t) = \{\phi, \{3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 3\} \}.$$

Si φ est la formule donnée au début de la présente section, on a

$$\beta_2\ (\varphi) = \{\phi, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{5\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Remarque. Le lemme 3 nous permet donc de considérer les tableaux et les formules comme des ensembles de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

LEMME 4. Les conditions (3) peuvent se condenser dans l'identité algébrique suivante

$$x_i^{(\epsilon_i)} = 1 + \epsilon_i + x_i \qquad \text{(modulo 2)}. \tag{6}$$

Démonstration: $x_i^{(1)} = 1 + 1 + x_i = x_i$, $x_i^{(0)} = 1 + 0 + x_i = 1 + x_i$.

LEMME 5.

$$\prod_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{S \subset I} \left(\prod_{i \in S} a_i \right) \left(\prod_{j \epsilon} b_i \right)$$

4. DUALITÉ: TABLEAUX — FORMULES

Voici un développement purement algébrique de la formule (5) représentant le tableau t.

On a successivement

$$\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in I} w\ (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)\ x_1^{(\epsilon_1)} \ldots x_n^{(\epsilon_n)}$$

$$= \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in I} w\ (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \prod_{i=1}^{n} (1 + \epsilon_i + x_i) \quad \text{(par le lemme 4)}$$

$$= \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in I} w\ (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \sum_{S \subset \mathbf{n}} \left(\prod_{j \in S} (1 + \epsilon_j) \right) \prod_{i \in S} x_i$$

(par le lemme 5)

$$= \sum_{S \subset \mathbf{n}} \left(\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in I} w(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \prod_{j \in S} (1 + \epsilon_j) \right) \prod_{i \in S} x_i . \tag{7}$$

Or on a $\prod_{j \in S} (1 + \epsilon_j) = 1$ si et seulement si $(\forall j)\ (j \notin S \rightarrow 1 + \epsilon_j = 1)$,

c.-à-d. si et seulement si $(\forall j)\ (\epsilon_j = 1 \rightarrow j \in S)$ ou bien, en considérant $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ comme un sous ensemble ϵ de $\{1, \ldots, n\}$, si et seulement si $(\forall j)$ $(j \epsilon \rightarrow j \in S)$, c.-à-d. $\epsilon \subset S$.

Donc (7) se réduit à

$$\sum_{S \subset \mathbf{n}} \left(\sum_{\epsilon \subset S} w(\epsilon) \right) \prod_{i \in S} x_i . \tag{8}$$

Comme nous travaillons dans $\mathbb{Z}/2$, $\sum_{\epsilon \subset S} w(\epsilon) = 1$ si et seulement si il existe un nombre impair de $\epsilon \subset S$ tels que $w(\epsilon) = 1$, donc selon le lemme 3 si et seulement si S *contient (comme sous-ensembles) un nombre impair d'éléments de* β_1 (t).

Soit $\varsigma = \beta_1$ (t). Alors (8) se réduit à la formule polynômiale

$$\sum_{S \in \varsigma} \left(\prod_{i \in S} x_i \right) \in F_n \tag{9}$$

où $\varsigma = \{S : S$ contient (comme sous-ensembles) un nombre impair d'éléments de $\varsigma\}$. (10)

THÉORÈME 2 *(représentation algébrique des tableaux)*

Si un polynôme $\varphi \in F_n$ représente le tableau $t \in T_n$ et si $\beta_1 (t) = \varsigma$, alors $\beta_2 (\varphi) = \hat{\varsigma}$, où $\hat{\varsigma}$ est défini par (10).

Exemple: Cherchons une formule représentant le premier tableau t donné en (2) dans la section 3.

On a déjà calculé que $\beta_1 (t) = \{ \phi, \{3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 3\} \} = \varsigma$.

Donc $\hat{\varsigma} = \{ \phi, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$ car ϕ ne contient que $\phi \in \varsigma$, $\{2\}$ ne contient que $\phi \in \hat{\varsigma}$, $\{2, 3\}$ ne contient que ϕ, $\{3\}$ et $\{2, 3\}$ éléments de ς, $\{1, 2, 3\}$ ne contient que ϕ, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$ éléments de ς.

Donc la formule φ associée est

$$1 + x_2 + x_2x_3 + x_1x_2x_3. \tag{11}$$

Remarque finale. On peut démontrer (la propriété surprenante) que si l'on connaît $\hat{\varsigma}$, alors on peut retrouver ς en faisant l'opération chapeau à $\hat{\varsigma}$ i.e. $\varsigma = \hat{\hat{\varsigma}}$. Donc, dans P (P(**n**)), les représentants des tableaux sont aux représentants des formules ce que les représentants des formules sont aux représentants des tableaux!

EXERCICES. 1. Soit le tableau t tel que w $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = 1$ si et seulement si il y a un nombre impair de ϵ_i qui sont égaux à 1. Montrer que la formule φ associée est $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

2. A l'aide du théorème 2, montrer que:

pour le tableau de $\neg$ on a $\varsigma = \{\phi\}$ et $\hat{\varsigma} = \left\{\phi, \{1\}\right\}$

pour le tableau de $\vee$ on a $\varsigma = \left\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\right\}$ et $\hat{\varsigma} = \left\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\right\}$

pour le tableau de $\rightarrow$ on a $\varsigma = \left\{\phi, \{1\}, \{1, 2\}\right\}$ et $\hat{\varsigma} = \left\{\phi, \{2\}, \{1, 2\}\right\}$

3. Démontrer le lemme 5.

4. Imaginer d'autres exercices et les résoudre!

Congrès annuel de l'A.M.Q.

(Drummondville, 21-23 mai 1971)

Invitation à tous!

Pour de plus amples renseignements à propos de ce congrès, consulter le *journal de l'AMQ*.

Ce sera encore une fois un congrès du tonnerre!