A

UN ASPECT DE LA COMBINATOIRE

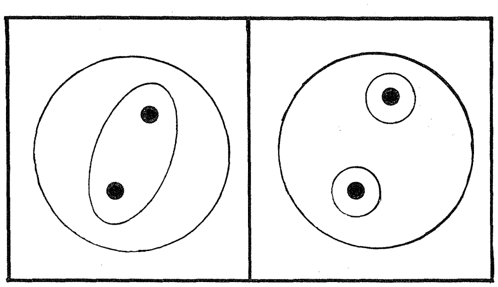
par Maurice GLAYMANN
Directeur de l'Institut de Recherche
sur l'Enseignement Mathématique de Lyon

INTRODUCTION

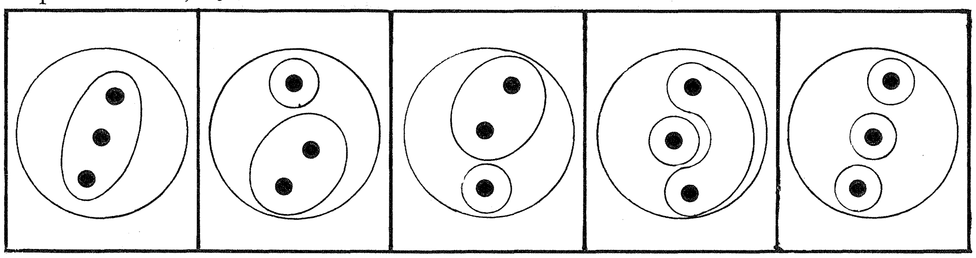
Je me propose de montrer ici ce que peut apporter la combinatoire au niveau du premier cycle. Je me limiterai à un seul aspect du problème: l'étude de quelques dénombrements dans le cadre des nouveaux programmes.

Cependant, il faut attirer l'attention sur le fait que la combinatoire, qui est l'étude des *ensembles finis,* peut fournir une matière importante dans la prochaine étape de la réforme. En effet, la combinatoire est peut-être un domaine où il est possible d'initier l'enfant au raisonnement mathématique: un problème de combinatoire consiste dans un premier temps à démontrer l'*existence* (ou la non-existence) d'un ensemble fini de cardinal n ayant certaines propriétés, puis, en cas d'existence, à dénombrer et classer tous les ensembles répondant au problème. Cette étude peut toujours commencer par une expérimentation pour les petites valeurs de n . Dès que n est trop grand, l'expérimentation s'arrête et il faut faire intervenir le *raisonnement* et éventuellement la *construction d'une méthode déductive.*

Voici un exemple caractéristique.
E est un ensemble à n éléments; déterminer le nombre B_n des partitions de E. Il est immédiat que pour $n = 1, B_1 = 1$; pour $n = 2, B_2 = 2$:



et pour $n = 3$, $B_3 = 5$:



Il est encore possible d'expérimenter pour $n = 4$: on trouvera 15 partitions. Mais pour des valeurs de n au-delà de 4 , la situation devient beaucoup trop complexe. Seule une démarche déductive permet de résoudre ce problème dans le cas général (voir page 18).

Dans la suite de cet exposé nous utiliserons les notations suivantes:

E est un ensemble fini; $|E|$ désigne son cardinal.

Si $|E| = n$, on parlera du n-ensemble E.

NOMBRE D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE E VERS UN ENSEMBLE F

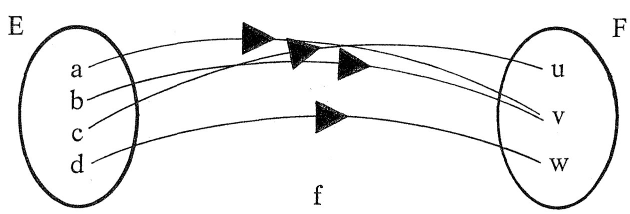
$\mathcal{A}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications de E vers F .
Si E est un n-ensemble et F un p-ensemble,
quel est le cardinal de $\mathcal{A}(E, F)$?

Ce problème est simple. Voici une solution qui utilise les matrices booléennes.
A chaque application

$$f : E \rightarrow F$$

nous pouvons associer une matrice booléenne $B(n, p)$ à n lignes et p colonnes; sur chaque ligne se trouve un élément 1 et un seul, les autres éléments étant 0 .

Exemple:



A l'application f , associons la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le problème revient à dénombrer les matrices booléennes $B(n, p.)$.
Sur chaque ligne d'une telle matrice nous pouvons placer l'élément 1 en p places différentes; comme nous avons n lignes, il s'ensuit que

$$(1) \qquad |\mathcal{A}(E, F)| = p^n.$$

NOMBRE D'INJECTIONS DE E VERS F ($|E| \leqslant |F|$)

$\mathcal{J}(E, F)$ désigne l'ensemble des injections de E vers F.
Quel est le cardinal de $\mathcal{J}(E, F)$?

Ici encore nous pouvons étudier l'ensemble des matrices booléennes associées aux injections.

Sur la première ligne, nous avons p choix pour l'élément 1; sur la seconde ligne, nous avons $(p-1)$ choix pour l'élément 1; . . . ; sur la $n^{\text{ième}}$ ligne, il y a $(p-n+1)$ choix pour l'élément 1.

Il en résulte que

$$(2) \qquad |\mathcal{J}(E, F)| = p\,(p-1)\,\ldots\,(p-n+1) \text{ avec } n \leqslant p.$$

En particulier, si $|E| = |F| = n$, on trouve $n!$ C'est le nombre des *bijections* de E vers F.

Nous verrons plus loin comment dénombrer les *surjections* de E vers F (dans le cas où $|E| \geqslant |F|$).

LES NOMBRES DE STIRLING

La formule (2) nous invite à étudier les polynomes de la forme

$$x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\,(x-n+1),$$

où n est un *naturel* non nul.

Un tel polynome est appelé *polynome factoriel*.

Posons

$$(3) \qquad x^{(n)} = x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\,(x-n+1).$$

C'est un polynome de degré n. Désignons par S_n^k le coefficient de x^k:

$$(4) \qquad x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S_n^k\, x^k .$$

En particulier

$$x^{(1)} = x = S_1^1\, x$$
$$x^{(2)} = x\,(x-1) = S_2^1\, x + S_2^2\, x^2 .$$

Les nombres S_n^k sont appelés *nombres de Stirling de première espèce.*

Il est facile de déterminer les premiers nombres de Stirling de première espèce:

$$S_1^1 = 1 \ , \ S_2^1 = -1 \ , \ S_2^2 = 1 \ ,$$

et de trouver une relation de récurrence. En effet, en partant de l'égalité:

$$(5) \qquad x^{(n+1)} = (x - n)\, x^{(n)},$$

nous obtenons par identification:

$$(6) \qquad \boxed{S_{n+1}^{k} = S_{n}^{k-1} - n\, S_n^k}$$

avec $S_n^k = 0$ et $S_n^0 = 0$ pour $k > n$.

Les nombres S_n^k possèdent des propriétés intéressantes. En particulier, quel que soit n, $S_n^n = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n} S_n^k = 0$.

Cependant, *on ne connaît pas d'expression donnant* S_n^k *en fonction de n et de k.* La relation (6) permet de calculer de proche en proche les nombres S_n^k.

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	−1	1				
3	2	−3	1			
4	−6	11	−6	1		
5	24	−50	35	−10	1	
6	−120	274	−225	85	−15	1

Nous pouvons alors introduire les nombres de Stirling de seconde espèce: n étant un naturel non nul, posons

$$(7) \qquad x^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k \, x^{(k)}$$

où $x^{(k)}$ est le polynome factoriel de degré k.

En particulier,

$$x = \sigma_1^1 \, x^{(1)} = \sigma_1^1 \, x$$

$$x^2 = \sigma_2^1 \, x^{(1)} + \sigma_2^2 \, x^{(2)} = \sigma_2^1 \, x + \sigma_2^2 \, x\,(x - 1)$$

Les nombres σ_n^k sont les *nombres de Stirling de seconde espèce:*

$$\sigma_1^1 = 1 \ , \ \sigma_2^1 = 1 \ , \ \sigma_2^2 = 1.$$

Ils vérifient la relation de récurrence

$$(8) \qquad \boxed{\sigma^k_{n+1} = \sigma^{k-1}_n + k\,\sigma^k_n}$$

avec $\sigma^k_n = 0$ et $\sigma^0_n = 0$ pour $k > n$.

En particulier, quel que soit n, $\sigma^n_n = 1$.

La relation (8) permet de calculer de proche en proche les nombres σ^k_n:

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Remarques

1. Contrairement aux nombres de Stirling de première espèce, on connaît une expression des nombres de Stirling de seconde espèce; on démontre que

$$(9) \qquad \boxed{\sigma^k_n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{n}{j} j^n}$$

2. Si V_n désigne l'espace vectoriel des polynomes de degré inférieur ou égal à n, alors $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une *base* de V_n. De même, $\{1, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(h)}\}$ est une autre *base* de V_n .

Il en résulte que la matrice (S^k_p) et la matrice (σ^k_p) sont *inverses* l'une de l'autre.

Ainsi:

pour $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

pour $n = 3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

NOMBRE DE PARTITIONS D'UN ENSEMBLE

$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est un n-ensemble

$F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$ est un $(n+1)$—ensemble

Pour $k \leqslant n$, désignons par Π_n^k l'ensemble des partitions de E en k classes (k—partitions de E).

Quel est le cardinal p_n^k *de* Π_n^k ?

Désignons par Π_{n+1}^k l'ensemble des k-partitions de l'ensemble F.

Nous pouvons distinguer:

(1) les éléments de Π_{n+1}^k pour lesquels b *forme à lui seul une classe* (éléments du type α);

(2) les autres éléments de Π_{n+1}^k (éléments du type β).

Faisons alors abstraction de l'élément b de F. Les k-partitions du type α correspondent à Π_n^{k-1}. Les k-partitions du type β correspondent à Π_n^k.

A chaque élément de Π_n^{k-1}, il correspond un élément de Π_{n+1}^k et à chaque élément de Π_n^k, il correspond k éléments de Π_{n+1}^k.

Il en résulte que

$$\boxed{p_{n+1}^k = p_n^{k-1} + k\, p_n^k.} \tag{10}$$

Comme d'autre part, $p_1^1 = 1$, $p_2^1 = p_2^2 = 1$, les nombres p_n^k ne sont autres que les nombres de Stirling de seconde espèce!

$$\boxed{p_n^k = \sigma_n^k} \tag{11}$$

On en déduit alors que le nombre B_n de partitions d'un n-ensemble (appelé *nombre de Bell)* est:

$$\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k} \tag{12}$$

Nous avons ainsi entièrement résolu le problème posé dans l'introduction. Nous trouvons en particulier:

$B_1 = 1 \quad B_2 = 2 \quad B_2 = 5$

$B_4 = 15 \quad B_5 = 52 \quad B_6 = 203$

NOMBRE DE SURJECTIONS DE E VERS F ($|E| \geqslant |F|$)

$\mathcal{S}(E, F)$ désigne l'ensemble des surjections de E vers F.
Si E est un n-ensemble, et F un k-ensemble, avec $n \geqslant k$,
quel est le cardinal $s_{n,k}$ de $\mathcal{S}(E, F)$?

Soit $s : E \to F$ une surjection de E vers F. Alors S induit une surjection de P(E) vers P(F), qui admet une réciproque $S^{-1}: P(F) \to P(E)$.

Posons $F = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Alors l'ensemble

$$P = \{s^{-1}\{b_1\}, \ldots, s^{-1}\{b_k\}\}$$

est une k-partition de E.

A chaque k-partition de E, il correspond k! surjections de E vers F. Il en résulte que

(13) $$\boxed{s_{n,k} = k!\ \sigma_n^k.}$$

Compte tenu de (8), on en déduit:

(14) $$\boxed{s_{n+1,k} = k(s_{n,k-1} + s_{n,k})}$$

avec $s_{n,k} = 0$ lorsque $k > n$. On a en particulier:

(15) $$\boxed{s_{n,n} = n!}$$

C'est le nombre des bijections de E vers F quand $|E| = |F| = n$.

D'autre part, quel que soit n, $s_{n,1} = 1$.

Voici les premières valeurs de $s_{n,k}$:

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1560	1800	720

Donnons pour terminer un résultat intéressant:

Soit E un n-ensemble, F un p-ensemble, X une k-partie de F ($k \leqslant p$) et $s: E \rightarrow X$ une surjection.

Il existe $k!\,\sigma_n^k$ telles surjections.

Il existe $\binom{p}{k}$ k-parties de F.

Il existe donc $\binom{p}{k}\, k!\, \sigma_n^k$ surjections de E vers l'ensemble des k-parties de F.

L'ensemble de telles surjections, pour $k = 1, 2, \ldots, p$, est l'ensemble des applications de E vers F.

Il en résulte que $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k}\, k!\, \sigma_n^k$.

Bibliographie

1. M. BARBUT	Mathématiques des sciences humaines. Tome I: *Combinatoire et Algèbre,* P.U.F.
2. C. BERGE	*Principes de combinatoire,* Dunod.
3. N. BOURBAKI	Livre I (Théorie des ensembles), chapitre III: *Ensembles ordonnés.. Cardinaux. Nombres entiers,* Hermann.
4. L. COMTET	*Analyse combinatoire* (tomes 1 et 2), P.U.F.
5. C. FRASNAY	*"Problèmes combinatoires",* article paru dans le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de France.
6. C. JOURDAN	*Calculus of finite differences,* Chelsea.
7. PAPY	*Mathématique moderne 5 — Arithmétique,* Didier.
8. P. ROSENSTIEHL & J. MOTHES	*Mathématique de l'action,* Dunod.
9. RYSER	*Mathématiques combinatoires,* Dunod.
10. A. ROUMANET	"Une classe de mathématique: motivation et méthodes", Actes du 1er Congrès International de l'Enseignement Mathématique (LYON 24-30 août 1969), D. REIDEL Publ., Hollande.
11. D. WHEELER	*Notes on Mathematics in Primary School,* Cambridge University Press.

ERRATA

Quelques erreurs se sont glissées dans le dernier numéro du Bulletin. La rédaction s'en excuse auprès des lecteurs.

Ainsi, à la page 39, il faut ajouter un pointillé dans la figure, de façon à obtenir quinze rectangles égaux. Au milieu de la page 20 devrait apparaître un signe d'égalité au lieu d'un signe d'inégalité. Au lieu d'un tiret, devrait apparaître une flèche aux endroits suivants: *page 18,* ligne —7; *page 19,* lignes 14 et 15; *page 21,* ligne 14.

A la page 40, problème 13 il faut lire PQRSTP au lieu de PQRST. Par contre, à la page 46, on doit lire *Mm.* au lieu de *Mme.*