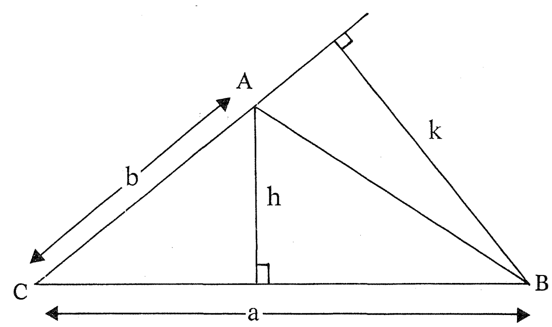
OLYMPIADE CANADIENNE DE MATHÊMATIQUE (1970)

QUESTIONNAIRE

1. Trouver tous les ensembles de trois nombres x, y, z tels que la somme de l'un quelconque des trois avec le produit des deux autres soit égale à deux.

2. Voici un triangle ABC dont l'angle A est obtus.



Montrer que $a + h \geqslant b + k$. Quand a-t-on l'égalité ?

3. Considérons un ensemble de balles, chacune de couleur bleue ou rouge et pesant chacune une livre ou deux livres. Il y a au moins une balle de chaque couleur et au moins une de chaque poids. Montrer que cet ensemble comprend deux balles de poids différents et de couleurs différentes.

4. (a) Trouver tous les entiers avec la propriété suivante: le premier chiffre est 6 et lorsqu'on le supprime on obtient un nombre égal au vingt-cinquième du nombre initial.

   (b) Montrer qu'il n'existe pas d'entier avec la propriété suivante: le premier chiffre est 6 et lorsqu'on le supprime on obtient un nombre égal au trente-cinquième du nombre initial.

5. Un quadrilatère a un sommet sur chacun des côtés d'un carré dont la longueur des côtés est 1. Montrer que les longueurs a, b, c et d des côtés du quadrilatère vérifient la relation $2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 4$.

6. Soient A, B, C trois points non alignés. Construire un cercle de centre C dont les tangentes passant respectivement par A et par B soient parallèles.

7. Montrer qu'étant donné cinq nombres entiers quelconques (pas nécessairement distincts), on peut en choisir trois dont la somme soit divisible par 3.

8. On considère dans un plan tous les segments de longueur 4 dont une extrémité est sur la droite $y = x$ et dont l'autre extrémité est sur la droite $y = 2x$. Quelle est l'équation du lieu géométrique des points milieux de ces segments?

9. Soit $f(n)$ la somme des n premiers termes de la suite.

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

(a) Trouver une formule pour $f(n)$.

(b) Montrer que $f(s+t) - f(s-t) = st$, où s et t sont des entiers positifs tels que $s > t$.

10. Soit le polynôme à coefficients entiers

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a'_{n-1} x + a_n .$$

Montrer que s'il existe quatre entiers distincts a, b, c et d tels que

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

alors il n'existe pas d'entier k tel que $f(k) = 8$.

CONCOURS MATHÉMATIQUE D'ONTARIO

(cf. pages 39 à 43 du Bulletin d'octobre 1970)

SOLUTIONS

1. (D) 2. (D) 3. (E) 4. (D) 5. (B) 6. (C) 7. (B) 8. (E)

9. (C) 10. (D) 11. (A) 12. (C) 13. (B) 14. (B) 15. (A) 16. (C)

17. (A) 18. (A) 19. (D) 20. (B) 21. (B) 22. (C) 23. (A)

24. (E) 25. (D) 26. (D) 27. (E) 28. (E) 29. (B) 30. (C)

31. (D) 32. (B)

(soumises par Claude Gaulin)