Le Coin du problème

Rédacteur: Gabriel Garneau, Ecole Polytechnique, Montréal.

CONCOURS DE PROBLÈMES

Les problèmes qui suivent font l'objet d'un concours auquel nous invitons tous nos lecteurs à participer. Les solutions reçues et jugées les plus intéressantes par leur originalité mériteront à leurs auteurs des prix sous forme de publications mathématiques. Faire parvenir vos solutions à Gabriel Garneau, département de mathématique, Ecole Polytechnique, 2500 avenue Marie-Guyard, Montréal 250, Québec.

PROBLÈME 1

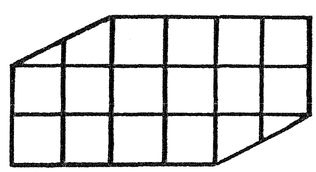
Quelle est la fraction du membre de gauche de l'égalité

$$\frac{XXXXX}{XXXXX} = \frac{43}{111},$$

sachant qu'on retrouve dix chiffres différents dans son numérateur et son dénominateur?

PROBLÈME 2

Découper la figure suivante en deux morceaux, de façon à pouvoir les replacer pour former un carré.



PROBLÈME 3

Quel est le plus petit entier positif divisible par 4403 et ne s'écrivant qu'avec des *1* ou des *0*?

PROBLÈME 4

Trouver une équation polynômiale à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

SOLUTIONS

Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro d'Eté 1969 (volume XI, numéro 3).

Félicitations à Monsieur Réal Ricard, de Trois-Rivières, qui s'est mérité un prix pour sa solution du problème 4.

PROBLÈME 1

Il suffit de considérer les quatre derniers chiffres des nombres de la suite de Fibonacci. Nous avons donc une suite d'entiers tous plus petits que 10^4. Soit a_k le nombre de quatre chiffres terminant le k^e nombre de Fibonacci. Si nous connaissons a_{k+1} et a_k nous pouvons trouver a_{k-1}. De plus si nous avons $a_k = a_{n+k}$ et $a_{k+1} = a_{n+k+1}$ pour deux entiers n et k, alors nous aurons aussi

$$a_{k-1} = a_{n+k-1},\ a_{k-2} = a_{n+k-2},\ \ldots,\ a_1 = a_{n+1}.$$

Mais comme $a_1 = 0$, alors $a_{n+1} = 0$. Ce qui signifie qu'il y a un nombre se terminant par quatre zéros en position $(n + 1)$ dans la suite de Fibonacci.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un couple identique parmi les $10^8 + 1$ suivants: (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{10^8}, a_{10^8+1}), $(a_{10^8+1}\ a_{10^8+2})$. Or il en est sûrement ainsi puisque aucun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{10^8+2}$ n'excède 10^4 et qu'avec les 10^4 entiers 0, 1, 2, ..., 9999, nous ne pouvons former que $10^4 \times 10^4 = 10^8$ couples distincts.

PROBLÈME 2

Tout entier N peut s'écrire sous l'une des formes suivantes: $5k$, $5k\pm1$, $5k\pm2$. Donc $N^{100} = (5k)^{100}$ ou encore $N^{100} = (5k\pm1)^{100}$ ou encore $N^{100} = (5k\pm2)^{100}$.

Dans le premier cas, $(5k)^{100} = 125k^3\ (5k)^{97}$ et N est donc divisible par 125. Le reste est 0.

Dans les deux autres cas, on fait un développement à l'aide du binôme de Newton et chaque fois on obtient un nombre congru à 1 modulo 125.

Donc les seuls restes possibles sont 0 et 1.

PROBLÈME 3

Supposons que ce nombre soit rationnel. Alors sa partie décimale est périodique. Supposons que n soit la longueur de sa période et que k chiffres précèdent l'apparition de la période. En écrivant le nombre donné, tout entier apparaîtra à un moment donné, en particulier le nombre 10^m où m est un entier arbitraire supérieur à $n+k$. Mais cela contredit l'hypothèse que n est la longueur de la période. Le nombre donné n'est donc pas rationnel.

PROBLÈME 4

Appelons a le quatrième chiffre du nombre cherché, b son cinquième et c son sixième.

De cette façon le nombre cherché est $523abc$. Ce nombre doit être divisible à la fois par 7, 8 et 9, il est donc un multiple de $7 \times 8 \times 9 = 504$.

5	2	3	a	b	c
5	0	4			
	1	9	a		
	0	0	0		
	1	9	a	b	
	1	5	1	2	
		4	$(a-1)$	$(b-2)$	c
		4	0	3	2
			$(a-1)$	$(b-5)$	$(c-2)$

Puisque le reste final est 0, on doit avoir $a = 1$, $b = 5$ et $c = 2$ d'où le nombre est 523152 .

N.B. Le dernier chiffre du quotient pourrait être 9 au lieu de 8 et alors on trouverait comme réponse 523656.

SOLUTION DES NOMBRES CROISÉS DU DERNIER NUMÉRO

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	1	6	■	1	0	0	0	■	1	0	2
2	1	5	■	4	5	■	1	■	2	■	1	■
3	6	■	1	0	■	9	■	5	■	8	■	0
4	■	1	2	■	6	■	1	■	1	■	5	6
5	3	0	■	2	■	3	■	4	■	9	■	0
6	1	2	1	■	1	■	0	■	5	■	3	2
7	4	■	4	2	■	1	2	6	■	3	■	0
8	1	5	■	5	1	2	■	5	2	■	1	6
9	6	2	5	■	5	6	1	■	2	7	3	■
10	■	0	■	1	0	■	2	0	■	0	■	1
11	4	■	2	4	■	2	3	■	1	■	2	0
12	2	4	■	4	3	2	■	1	0	1	■	0