I

LA FONCTION DU PLUS GRAND ENTIER

par Luc CHAPUT,
Département de mathématique
Univ. du Québec à Montréal

INTRODUCTION

Traditionnellement, dans l'enseignement élémentaire, la fonction du plus grand entier était pratiquement ignorée. Pourtant l'étude de cette fonction offre plusieurs avantages pédagogiques en plus d'être utile pour la formation mathématique ultérieure de l'étudiant.

Chacun connaît l'astuce qu'utilisent beaucoup de marchands dans leur publicité et qui consiste, par exemple, à marquer un article \$5.97 ou \$5.99. Il s'agit évidemment là d'une incitation implicite très forte à *lire* \$5. au lieu de \$6., surtout pour le client qui juge du prix d'après le nombre entier de dollars . . .

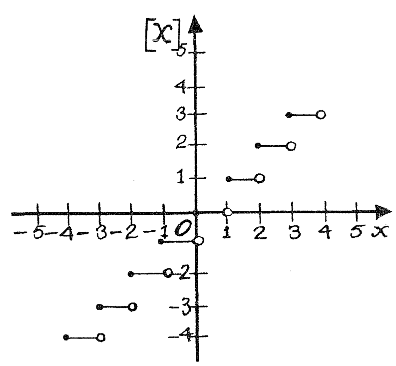
Cet exemple illustre une fonction que l'on peut définir ainsi de façon générale:

> On appelle *fonction du plus grand entier* l'application qui à chaque nombre réel x fait correspondre le nombre entier noté $[x]$ tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

L'existence et l'unicité de $[x]$ sont des conséquences de l'axiome de la plus petite borne supérieure (ou d'axiomes équivalents) dans l'ensemble des réels. Toutefois, au cours secondaire, il est assez naturel d'admettre cette existence sans démonstration, en s'appuyant sur les propriétés familières des nombres réels.

On a par exemple $[14/3] = 4$, $[-7] = -7$, $[\pi] = 3$ et $[-2.64] = -3$.

La fonction du plus grand entier constitue l'exemple le plus simple de *fonctions en escalier*. Le graphe de droite d'ailleurs le confirme bien. Les fonctions en escalier interviennent dans la vie courante, par exemple pour calculer le coût d'affranchissement d'une lettre expédiée par courrier recommandé ou le coût de la prime pour l'envoi d'un mandat-poste, etc.



Comme on le vérifie, la fonction du plus grand entier est continue partout sauf pour les valeurs entières de la variable, où il n'y a que continuité à droite.

Nous désirons ici, sans entrer trop dans les détails, souligner quelques applications et propriétés de cette fonction.

APPLICATIONS EN THÉORIE DES NOMBRES

Proposition 1.

Soit τ la fonction qui associe à un entier positif n le nombre de diviseurs entiers positifs de n. (Ainsi $\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(10) = 4, \ldots$)

Pour tout entier positif, on a

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

Vérification pour $n = 10$:

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(10) = 1+2+2+3+2+4+2+4+3+4=27$$

$$\left[\frac{10}{1}\right] + \left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{10}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{10}{10}\right]$$

$$= 10 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 27.$$

Proposition 2.

Pour tout entier positif n,

$$\tau(n) = 1 + \sum_{d=1}^{n-1} \left(\left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n-1}{d}\right]\right)$$

Vérification pour $n = 4$:

$$\tau(4) = 1 + \sum_{d=1}^{3} \left(\left[\frac{4}{d}\right] - \left[\frac{3}{d}\right]\right) = 1 + (4 - 3) + (2 - 1) + (1 - 1) = 3.$$

Les preuves de ces deux propositions sont élémentaires. A ce sujet, le lecteur pourra consulter par exemple le livre de Vinogradov paru chez Dover, à New York.

Proposition 4. (algorithme de la division)

Pour des entiers positifs a et b, il existe des nombres naturels q et r uniques tels que

$$a = qb + r \qquad (o \leqslant r < b).$$

Par suite, on peut s'écrire (d'une manière unique) :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \qquad (0 \leqslant \frac{r}{b} < 1).$$

En effet, puisque l'on a toujours $x = [x] + \epsilon \quad (0 \leqslant \epsilon < 1)$, on peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \epsilon$!

Proposition 5.

Si a et b sont deux nombres irrationnels positifs tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, alors les suites $[an]$ et $[bn]$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, engendrent *tous* les entiers positifs *sans répétition*.

Exemple : $a = \sqrt{2}$ et $b = 2 + \sqrt{2}$. Alors la suite $[an]$ devient 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11 etc. et la suite $[bn]$ devient 3, 6, 10, etc.

QUELQUES PROPRIÉTÉS.

Voici les propriétés les plus usuelles de la fonction du plus grand entier.

1°) Pour tout réel x et pour tout entier m:

$$[x + m] = [x] + m.$$

Preuve. On sait que $x = [x] + \epsilon$, où $0 \leqslant \epsilon < 1$; donc $x + m = [x] + m + \epsilon$. Puisque $[x] + m$ est en entier compris entre $x + m$ et $x + m + 1$, la définition et l'unicité de $[x + m]$ permettent de conclure.

La preuve peut aussi s'effectuer par le principe d'induction, mais elle devient plus lourde.

2°) Pour des réels x et y quelconques:

$$[x + y] \geqslant [x] + [y].$$

Preuve. Par définition, $[x] \leqslant x$ et $[y] \leqslant y$, d'où, en additionnant membre à membre, $[x] + [y] \leqslant x + y$. Maintenant, il suffit de remarquer que $[x + y]$ est *le plus grand* entier supérieur ou égal à $x + y$.

La preuve peut s'effectuer aussi en posant $x = [x] + \epsilon_1$ où $0 \leqslant \epsilon_1 < 1$ et $y = [y] + \epsilon_2$, $0 \leqslant \epsilon_2 < 1$. On additionne alors membre à membre et on considère les cas $0 \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$ et $1 \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2 < 2$, qui impliquent respectivement $[x + y] = [x] + [y]$ et $[x + y] = [x] + [y] + 1$. La conclusion suit.

3°) Pour des réels x et y quelconques:

$$[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$$

Cela découle de 2° et de la définition de $[x]$.

4°) Pour des réels x et y quelconques:

Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $[x]\,[y] \leqslant [xy] \leqslant [xy] + 1$.

La preuve est laissée au lecteur. Elle est la copie de celle donnée en 2°.

5°) Pour tout réel x et tout entier positif n, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

Preuve. Posons $x = [x] + \epsilon$, où $0 \leqslant \epsilon < 1$ et $h = [x]$.

Alors $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{h + \epsilon}{n}\right] = \left[\frac{h}{n} + \frac{\epsilon}{n}\right]$. A cause de 2°, on tire: $\left[\frac{h}{n} + \frac{\epsilon}{n}\right] > \left[\frac{h}{n}\right] + \left[\frac{\epsilon}{n}\right]$ et $\frac{\epsilon}{n} = 0$, d'où $\left[\frac{h + \epsilon}{n}\right] \geqslant \left[\frac{h}{n}\right]$. Si on avait $\left[\frac{h}{n}\right] < \left[\frac{h + \epsilon}{n}\right]$, alors il s'en suivrait que $\left[\frac{h}{n}\right] + 1 \leqslant \left[\frac{h + \epsilon}{n}\right]$ et par 1° que $\left[\frac{h}{n} + 1\right] \leqslant \left[\frac{h + \epsilon}{n}\right]$, d'où $n \leqslant \epsilon$ (contradiction).

Une preuve plus élégante existe aussi en utilisant l'algorithme de la division mentionné ci-haut.