LES AMIS DE MES AMIS SONT . . .

Soit un ensemble E de n personnes $(n > 2)$ et soit A la relation d'amitié définie sur E. Alors il existe (au moins) deux de ces personnes qui ont le même nombre d'amis.

(Problème tiré de la revue NICO, 1970)

Solution (André Joyal et Jean-Claude Matthys)

(Preuve par l'absurde.) Sinon l'application E — $\{1,2,3,\dots,n\} : x$ — $m(x)$, où $m(x)$ est le cardinal de $\{y \in E \mid x A y\}$, c'est-à-dire celle qui associe à chaque personne le nombre de ses amis, serait injective. Puisque E et $\{1,2,\dots,n\}$ sont des ensembles *finis* équipotents, alors m serait bijective. D'où (1) il existerait une personne unique p ayant exactement n amis (dont elle-même!) et (2) il existerait une personne unique q n'ayant d'autre ami qu'elle-même. Par suite, selon (1), p admettrait q parmi ses amis et, par symétrie de la relation A, q aurait également p comme ami, ce qui contredit (2).