L'université de Waterloo organise chaque année deux concours mathématiques très populaires en Ontario. Les étudiants des autres provinces peuvent aussi y participer. Voici le questionnaire du concours d'avril 1968, destiné aux élèves du Secondaire (11e année ou moins). Les questions sont à choix multiple et le temps total alloué est d'une heure.

CONCOURS MATHÉMATIQUE D'ONTARIO*

QUESTIONNAIRE

PARTIE A (3 points par question)

1. $\frac{1}{2}\%$ de 900 vaut:

   (A) 450 (B) 45 (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) un autre nombre

2. Lorsque $x = \frac{1}{2}$ et $y = -3$, l'expression $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ vaut:

   (A) $-\frac{27}{8}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $-\frac{18}{4}$ (D) $\frac{7}{2}$ (E) un autre nombre

3. Si $5x - 3 = ax$, alors x est égal à:

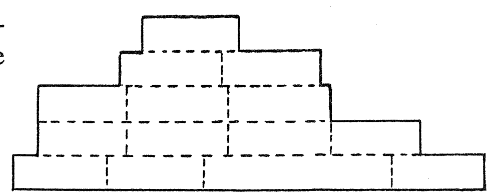
   (A) $a - \frac{5}{3}$ (B) $3 - \frac{a}{5}$ (C) $\frac{5}{a+3}$ (D) $\frac{3}{a-5}$ (E) $\frac{3}{5-a}$

4. Si dans l'expression (x-p) (y-q), on remplace x par p-x, y par q-y, p par x-p et q par y-q, alors l'expression:

   (A) garde la même valeur (B) s'annule (C) est doublée
   (D) est quadruplée (E) change de signe

5. La figure montre quinze rectangles, chacun de hauteur h et de largeur w. Le périmètre de la figure est:

   (A) $15w + 15h$ (B) $10w + 10h$
   (C) $30w + 15h$ (D) $30h + 30w$
   (E) un autre nombre



6. Si la longueur du rayon augmente d'une unité, alors le rapport de la nouvelle circonférence au nouveau diamètre vaut:

   (A) $(\pi + 2) : 1$ (B) $(2\pi + 1) : \pi$ (C) $\pi : 1$ (D) $(2\pi - 1) : 2$
   (E) $(\pi - 2) : 1$

Merci à M. Roland BROSSARD, de l'Université de Montréal, d'en avoir rendu la publication possible.

7. Dans une pompe, chaque coup de piston permet d'évacuer le quart de l'air que contient un réservoir. Après trois coups de piston, quelle fraction reste-t-il du volume initial d'air dans le réservoir?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{27}{64}$ (C) $\frac{37}{64}$ (D) $\frac{1}{64}$ (E) $\frac{2}{3}$

8. Lors d'un examen, la moyenne des résultats d'une classe de vingt étudiants a été de 66%, tandis que celle d'une autre classe de 30 étudiants a été de 56%. Le pourcentage moyen pour l'ensemble des étudiants des deux classes a donc été de:

(A) 58 (B) 62 (C) 61 (D) 59 (E) un autre nombre

9. Combien y a -t-il de nombres dont l'inverse vaut exactement la moitié?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) un nombre fini supérieur à 2
(E) un nombre infini

10. Si $a < 0$, $b > 0$ et $|a| = |b|$, alors il est faux que:

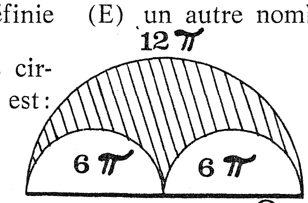
(A) ab est un nombre négatif (B) $a + b = 0$ (C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$

(D) $\frac{a}{b} = 1$ (E) $|a| . b > 0$

11. Si $x = -1$, alors la valeur de $(x^2 + x^{-2})^{-1}$ est:

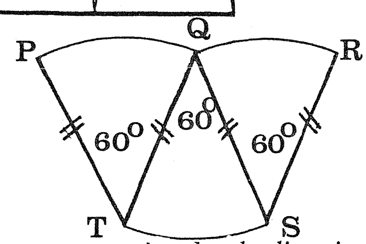
(A) 0.5 (B) 2 (C) 0 (D) non définie (E) un autre nombre

12. La figure montre les longueurs de trois circonférences. L'aire de la région hachurée est:



(A) 18π (B) 54π (C) 36π
(D) 72π (E) 144π

13. Les arcs de cercle PQ, QR et ST dans la figure ont respectivement pour centres T, S et Q. Si PT a pour longueur 1 unité, alors le périmètre de la figure curviligne PQRST est:



(A) $4 + \pi$ (B) $2 + \pi$ (C) 2π
(D) $2 + 2\pi$ (E) un autre nombre

14. Un paté de maisons de longueur totale x verges, est construit selon la direction est-ouest. Il est divisé en m lots égaux. Au centre de chacun des lots se trouve une maison de b verges de longueur. Quelle est, en verges, la distance entre le mur est de la maison située le plus à l'est et le mur ouest de la maison située le plus à l'ouest?

(A) $x - \left(\frac{x}{2m} - \frac{b}{2}\right)$ (B) $\frac{x(m-1) + mb}{m}$ (C) $\frac{x(m-1) + b}{m}$

(D) $mb + \frac{x}{m}(m-1)$ (E) un autre nombre

PARTIE B (4 points par question)

15. Si les équations $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$ et $x - y = k$ sont toutes deux satisfaites par un même couple de nombres réels, alors k vaut:

(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) 0 (E) 2

16. Parmi les équations suivantes, laquelle a pour solutions à la fois (7,6) et (−7,6)?

(A) $857x^3 - 857y^3 = 108839$ (B) $1602x^3 + 534y^4 = 142578$
(C) $98x^4 + 4937y = 264920$ (D) $x + y = 13$ (E) $x - y = -13$

17. Trois pays, Banania, Carottia et Pommetia utilisent comme monnaie respectivement la banane, la carotte et la pomme. Si, par suite d'un accord entre ces pays, a pommes valent b bananes et B bananes valent c carottes, alors combien de pommes valent C carottes?

(A) $\frac{aBC}{bc}$ (B) $\frac{abc}{BC}$ (C) $\frac{acC}{bB}$ (D) $\frac{abB}{cC}$ (E) un autre nombre

18. Un roseau (supposé rigide) croît au centre d'un étang circulaire de 8 pieds de diamètre. Il atteint une hauteur d'un pied au-dessus du niveau de l'eau. Lorsqu'on tire le roseau vers soi, en s'assurant que son pied reste fixe, on réussit à amener son extrémité jusqu'à ce qu'elle touche au bord de l'étang. La profondeur de l'étang est de:

(A) $7\frac{1}{2}$ pieds (B) 4 pieds (C) 3 pieds (D) 8 pieds (E) $\sqrt{17}$ pieds

19. Si x est un nombre réel, alors on a $|x+3| + |2-x| = 5$ si et seulement si:

(A) $x = 0$ (B) x a une valeur quelconque (C) x a deux valeurs, dont -3
(D) $-3 \leqslant x \leqslant 2$ (E) $x \geqslant -3$

20. Un triangle ABC est obtus en C. Les bisectrices des angles extérieurs en A et en B rencontrent BC et AC (prolongés) respectivement en D et en E. Si $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BE}$, alors la mesure de l'angle ACB est de:

(A) 105° (B) 108° (C) 144° (D) 135°
(E) un autre nombre de degrés

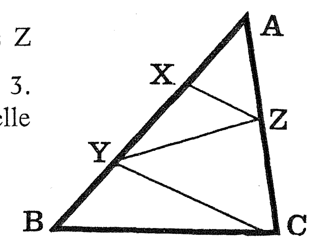
21. Soient A le point (0,4), B le point (9,8) et C un point situé sur l'axe des X. Alors la plus petite valeur de $\overline{AC} + \overline{CB}$ est:

(A) $4 + \sqrt{145}$ (B) 15 (C) $8 + \sqrt{97}$ (D) $\sqrt{97}$ (E) 12

22. Si $X = \sqrt{17} + \sqrt{13}$, $Y = \sqrt{18} + \sqrt{12}$ et $Z = \sqrt{19} + \sqrt{11}$, alors

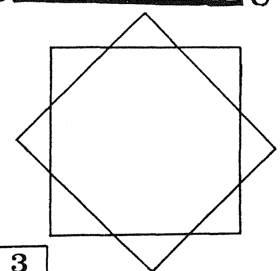
(A) $X = Y = Z$ (B) $X < Y < Z$ (C) $X > Y > Z$
(D) $X > Z > Y$ (E) $Z > X > Y$

23. Dans la figure, $\overline{AX} = \overline{YB} = \frac{1}{2}\,\overline{XY}$. De plus Z divise AC intérieurement dans le rapport 2 : 3. Alors le rapport de l'aire du triangle YBC à celle du triangle ZYC est:



(A) 5 : 12 (B) 5 : 9 (C) 2 : 9
(D) 10 : 9 (E) 2 : 3

24. On forme une étoile à huit pointes en plaçant sur chaque côté d'un octogone régulier un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse coincide avec ce côté. Si le périmètre de l'octogone est 8, alors le périmètre de l'étoile est:



(A) 16 (B) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ (C) $8+\frac{8}{\sqrt{2}}$
(D) $8\sqrt{2}+8$ (E) $8\sqrt{2}$

25. Les entiers positifs sont disposés de la manière indiquée. Quel nombre apparaît à l'intersection de la 61e rangée et de la 23e colonne?

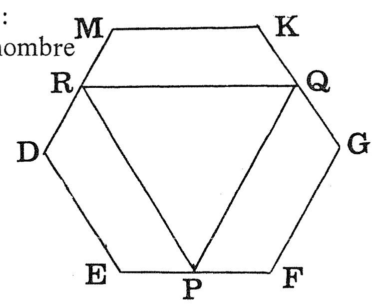
1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21

(A) 6123 (B) 2361 (C) 1830
(D) 1853 (E) 1861

26. Le reste de la division de $(142835633)^3$ par 7 est:
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) un autre nombre

PARTIE C (5 points par question)

27. Voici un hexagone régulier DEFGKM. Si P, Q et R sont les milieux de EF, GK et DM respectivement, alors le rapport du périmètre du triangle PQR au périmètre de l'hexagone DEFGKM est:



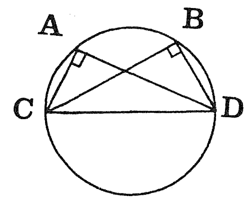
(A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 1 : 2 (D) 2 : 3
(E) 3 : 4

28. Trois billes sphériques, chacune de rayon un pouce, reposent sur une table non rugueuse et sont gardées en contact les unes avec les autres à l'aide d'un cylindre creux de hauteur deux pouces. Le rayon intérieur de ce cylindre, en pouces, est de:

(A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2)$ (B) $\sqrt{3}+1$ (C) $(\sqrt{3}+3) : 3$ (D) $(\sqrt{3}+6) : 3$
(E) $(2\sqrt{3}+3) : 3$

29. A douze heures exactement, la petite aiguille d'une montre se met à avancer au double de sa vitesse normale, tandis que la grande aiguille se met à avancer à la moitié de sa vitesse ordinaire. Lorsque les deux aiguilles seront à nouveau superposées, l'heure exacte sera:
(A) 1 h. 30 (B) 3 h. (C) 3 h. 30 (D) 4 h. (E) 6 h.

30. Deux triangles rectangles égaux sont inscrits dans un même cercle de rayon R comme l'indique la figure. Si $\overline{AC} = \overline{BD} = x\text{-}1$ et $\overline{AD} = \overline{BC} = x + 1$, alors AB a pour longueur:



(A) $2\sqrt{2x} - R^2$ (B) $(x^2 + 1) : R$ (C) $\dfrac{2x}{R}$

(D) $\sqrt{2x} - R^2$ (E) un autre nombre

31. On inscrit un carré dans un triangle équilatéral de façon que l'un de ses côtés soit placé selon un côté du triangle. Le rapport de l'aire du carré à l'aire du triangle est:

(A) $1 : 2$ (B) $(28\sqrt{3} - 48) : 1$ (C) $\dfrac{4}{\sqrt{3}\,(1 + 2\sqrt{3})^2} : 1$

(D) $\dfrac{12}{(2 + \sqrt{3})^2} : 1$ (E) un autre rapport.

32. Soit un nombre réel $y = 1$. On définit deux fonctions sur des nombres réels, notées * et \$:

$$*(y) = \frac{1}{y} \text{ et } \$(y) = \frac{y+1}{y-1}.$$

Combien de nombres différents peut-on obtenir au total en partant de y et en appliquant ces deux fonctions autant de fois qu'on veut, dans n'importe quel ordre:

(A) 2 (B) 8 (C) une infinité (D) un nombre variant entre 1 et 6 inclusivement (E) un nombre variant entre 2 et 12 inclusivement.

PREMIÈRE OLYMPIADE CANADIENNE DE MATHÉMATIQUE

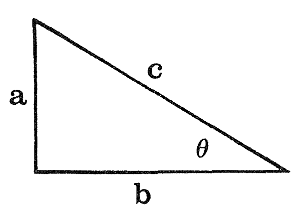
(Cf. Pages 15 et 16 du Bulletin d'Automne-Hiver 1969)

SOLUTIONS

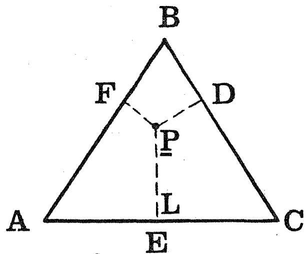
PROBLÈME 1. Il suffit de remarquer qu'en posant $a_i = kb_i$ pour $i = 1,2,3$, les deux membres deviennent égaux à k^n.

PROBLÈME 2. Le second nombre est toujours supérieur au premier. Sinon on aurait: $\sqrt{c+1} - \sqrt{c} \geqslant \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$, d'où $\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} > 2\sqrt{c}$ et, en élevant au carré puis en simplifiant, $\sqrt{c^2 - 1} \geqslant c$. Il s'en suivrait que $c^2 - 1 \geqslant c^2$, ce qui est impossible.

PROBLÈME 3. La figure montre que $a = c \sin\theta$ et $b = c \cos\theta$. Par contre, $\sin\theta \leqslant 1$, d'où $2 \sin\theta \cos\theta \leqslant 1$ et $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \leqslant 2$. Donc $\sin\theta + \cos\theta \leqslant \sqrt{2}$. Par substitution on obtient l'inégalité cherchée. L'égalité $a + b = \sqrt{2}\,c$ équivaut à $\sin 2\theta = 1$. Il y a donc égalité si $\theta = 45°$, donc si le triangle est isocèle.



PROBLÈME 4. Soient c et h les longueurs des côtés et des hauteurs respectives du triangle ABC. L'aire de ABC égale d'une part $\frac{1}{2}$c h et d'autre part la somme des aires des trois triangles, soit $\frac{1}{2}c \cdot \overline{PF} + \frac{1}{2}c \cdot \overline{PE} + \frac{1}{2}c \cdot \overline{PD}$. Il s'en suit que $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = h$. Par ailleurs, puisque $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,c$, alors $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 3\,c = 2\sqrt{3}\,h$.
La conclusion suit.

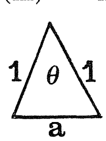


PROBLÈME 5. On évalue l'aire S du triangle ABC de deux façons et on compare les résultats. D'abord $S = \frac{1}{2}$ ab sin C d'où $S = ab \sin\frac{1}{2}C \cos\frac{1}{2}C$. Ensuite $S = \frac{1}{2}a \cdot \overline{CD} \sin\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}b \cdot \overline{CD} \sin\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \overline{CD} \sin\frac{1}{2}C$.
La conclusion suit.

PROBLÈME 6. Si on pose $f(n) = 1.\,1! + 2.\,2! + \ldots + n.n!$ et $g(n) = 1! + 2! + \ldots + n!$, alors $f(n) + g(n) = g(n+1) - 1$. Donc $f(n) = g(n+1) - g(n) - 1 = (n+1)! - 1$. On peut arriver facilement au même résultat à partir de l'égalité $n.n! = (n+1)! - n!$.

PROBLÈME 7. Il suffit de montrer que $a^2 + b^2$ ne peut être de la forme $8c + 6$, soit un multiple de 8, augmenté de 6. Or le carré d'un nombre entier est nécessairement de l'une des formes 8k ou 8k + 1 ou 8k + 4. Or en ajoutant deux nombres de cette forme, on ne trouve jamais un multiple de 8, augmenté de 6.

PROBLÈME 8. D'abord, $f(1) = 1$, puisque $2 = f(2) = f(2 \cdot 1) = 2\,f(1)$. Si l'on avait pas $f(n) = n$ pour tout entier n, il existerait un plus petit entier $m \geqslant 3$ tel que $f(m) \neq m$. Alors m devrait être impair, car $m = 2k$ impliquerait: $f(2k) = f(2) \cdot f(k) = 2k$ ou $f(m) = m$, ce qui serait contradictoire. Mais alors $m + 1$ serait pair et l'on aurait: $\frac{1}{2}(m+1) < m$, donc $f(m+1) = f(2) \cdot f(\frac{1}{2}(m+1)) = 2 \cdot \frac{1}{2}(m+1) = m + 1$, et de même $f(m+1) = m - 1$. Par suite, $f(m-1) < f(m) < f(m+1)$ ou $m - 1 < f(m) < m + 1$, d'où $f(m) = m$ (contradiction!)



PROBLÈME 9. Soit la longueur de son plus petit côté. Alors nécessairement l'angle au centre θ est aigu ou droit. Le maximum de a est atteint lorsque θ est droit, cas où $a = \sqrt{2}$. Donc $a < \sqrt{2}$.

PROBLÈME 10. Soient A_1, A_2 et A_3 resp. les aires de APQ, BPR et QCRP. Alors si l'on pose $x = \overline{AQ} = \overline{RC}$, on a $A_1 = \frac{1}{2}(1-x)^2$, $A_2 = x(1-x)$ et $A_3 = \frac{1}{2}x^2$. Les graphes de $y = \frac{1}{2}(1-x)^2$, $y = x(1-x)$ et $y = \frac{1}{2}x^2$ sont des paraboles. On voit graphiquement que le maximum de A_1, A_2 et A_3 est toujours au moins égal à la solution de $x(1-x) = \frac{1}{2}x^2$ ou $x = 3$, et par suite toujours au moins égal à 2/9.