Le Coin du problème

Rédacteur: Gabriel Garneau, Ecole Polytechnique, Montréal.

CONCOURS DE PROBLÈMES

Les problèmes qui suivent font l'objet d'un concours auquel nous invitons tous nos lecteurs à participer. Les solutions reçues et jugées les plus intéressantes par leur originalité mériteront à leurs auteurs des prix sous formes de publications mathématiques. Faire parvenir vos solutions à Gabriel Garneau, département de mathématique, Ecole Polytechnique, 2500 avenue Marie-Guard, Montréal 250, Québec.

PROBLÈME 1

Sur une circonférence Γ, on choisit deux points A et B d'un même côté d'une corde Δ et un point D sur cette corde. Déterminer un point C sur Γ tel que l'angle ACB intercepte sur Δ un segment dont D sera le milieu.

PROBLÈME 2

Trouver toutes les valeurs entières positives de x et de y pour lesquelles on a $x^y - y^x = 1$.

PROBLÈME 3

Trouver $\Sigma \sqrt[3]{[p]}$ lorsque p varie de 1 à $n^3 + 18n^2 + 216$ inclusivement, si [p] désigne la partie entière de p.

PROBLÈME 4

On a un jeton dont les faces sont marquées respectivement 2 et 3. On lance le jeton et on fait la somme des nombres qui apparaissent à chacun des lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement n ?

SOLUTIONS

Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro de janvier (volume XI, numéro 2).

Félicitations à Mlle Lucille Forest, de Bromptonville, qui s'est mérité un prix pour sa solution originale du problème 5 (reproduite ici).

PROBLÈME 1

a) $SIN^2 + COS^2 = UNITE = 235^2 + 142^2 = 75389.$

b) $TAN^2 + UNO^2 = SEC^2 = 426^2 + 568^2 = 710^2.$

PROBLÈME 2

$(1 - 3x + 3x^2)^{743} (1 + 3x - 3x^2)^{744} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$, où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont les coefficients dont nous voulons trouver la somme et le degré du polynôme est $n = (2 \times 743) + (2 \times 744) = 2974$. Posant $x = 1$ dans l'équation plus haut, on obtient $1^{743} . 1^{744} = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

La somme cherchée est donc égale à 1.

PROBLÈME 3

$$\int_{2\pi}^{0} [\, n \sin t \,]\, dt = \int_{0}^{\pi} [\, n \sin t \,]\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} [\, n \sin t \,]\, dt$$

Dans la deuxième intégrale, posons $t = z + \pi$; on obtient alors

$$\int_{\pi}^{2\pi} [\, n \sin t \,]\, dt = \int_{0}^{\pi} [\, n \sin (z + \pi) \,]\, dz = \int_{0}^{\pi} [\, -n \sin z \,]\, dz.$$

Or $[\, A \,] + [\, -A \,] = -1$ si $A \neq 0$, d'où

$$\int_{0}^{2\pi} [\, n \sin t \,]\, dt = \int_{0}^{\pi} ([\, n \sin t \,] + [\, -n \sin t \,])\, dt = \int_{0}^{\pi} (-1)\, dt = -\pi.$$

Remarque:

$[\, n \sin t \,] + [\, -n \sin t \,] = 0$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \pi$ dans le domaine d'intégration. Par conséquent la valeur de l'intégrale n'est pas affectée, puisque la fonction à intégrer est constante presque partout sur le domaine d'intégration.

PROBLÈME 4

Dans quelle base 374 est-il un carré parfait?

Solution

Soit r la base, alors on a $3r^2 + 7r + 4 = k^2$, d'où $(3r + 4)(r + 1) = k^2$ et $[3(r + 1) + 1](r + 1) = k^2$.

Et comme $3(r + 1) + 1$ et $r + 1$ sont relativement premiers, alors il faut que chacun d'eux soit un carré parfait. Posons donc $3r + 4 = a^2$ et $r + 1 = b^2$. La relation existant entre a^2 et b^2 est donnée par $a^2 = 3b^2 + 1$ ou $a^2 - 3b^2 = 1$.

Il s'agit d'une équation de Pell, dont on peut déduire une famille infinie de solutions de la façon suivante.

Si a_0 et b_0 forment une solution de cette équation, alors on a

$$(a_0 + \sqrt{3}\, b_0)(a_0 - \sqrt{3}\, b_0) = 1,$$

d'où $(a_0 + \sqrt{3}\, b_0)^n (a_0 - \sqrt{3}\, b_0)^n = 1^n = 1$, ce qui ramène à la forme $(A_0 + \sqrt{3}\, B_0)(A_0 - \sqrt{3}\, B_0) = 1$.

Donc à partir d'une solution particulière, on peut en construire une infinité d'autres, ce qui n'entraîne pas nécessairement que ce sont là les seules solutions de l'équation. Ainsi on vérifie que $a = 2$, $b = 1$ est une solution de l'équation. D'où $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ et $a = 7$, $b = 4$ forme une autre solution. De même $(2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$ et $a = 26$, $b = 15$ forme une autre solution, etc.

Pour chacune de ces solutions, on peut trouver une valeur correspondante pour r. Ainsi pour $b = 1$ on trouve $r = 0$, pour $b = 4$ on trouve $r = 15$ et pour $b = 15$ on trouve $r = 224$ et ainsi de suite.

La solution avec $r = 0$ est à rejeter comme vide de contenu. Pour $r = 15$, on obtient $(374)_{15} = 28^2$. Pour $r = 224$, on obtient $(374)_{224} = 390^2$.

PROBLÈME 5

$n^2 + 3n + 5$ n'est jamais divisible par 121 quelle que soit la valeur entière donnée à n

Solution (proposée par Mlle Lucille Forest, Bromptonville)

Supposons que pour un $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3n + 5$ soit divisible par 121. Alors $n^2 + 3n + 5 = 121\,k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et par suite $n^2 + 3n + (5 - 121\,k) = 0$.

On déduit que $n = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{11\,(44\,k - 1)}\right)$ et comme 11 et $44\,k - 1$ somme relativement premiers, alors $n \notin \mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $n^2 + 3n + 5$ n'est jamais divisible par 121.

MONSIEUR JEAN-GUY GAGNON AU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

Depuis l'été dernier, le ministère de l'Education a un nouveau responsable de la mathématique, en la personne de M. Jean-Guy GAGNON. Les membres de l'A.M.Q. ont lieu de se réjouir de cette nomination d'un de ses membres qui a déjà fait beaucoup pour l'avancement de la mathématique au Québec.

Père de huit enfants, M. Gagnon a derrière lui une longue expérience d'enseignant. Après avoir été professeur au Séminaire de Chambly, il enseigna la mathématique à la Commission scolaire régionale de Chambly, où il devint bientôt coordonnateur dans cette discipline. Pendant plusieurs étés, il collabora au Cours de Recyclage et de Perfectionnement en Mathématique, à titre de professeur-recherchiste et d'animateur. Il a été mêlé de près à plusieurs initiatives touchant la réforme de l'enseignement mathématique chez nous. Il est aussi l'un des auteurs d'une série de textes programmés pour le premier cycle du cours secondaire.

Souhaitons bonne chance à Jean-Guy et, selon son désir même, aidons-le à défendre nos intérêts et à promouvoir notre cause au ministère de l'Education, par nos suggestions, nos critiques constructives et notre collaboration.