CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC (1969)
(cf. pages 71 et 72 du bulletin de l'été 1969)

SOLUTIONS

PROBLÈME 1. a) Si 3 poules pondent 3 oeufs en 3 jours, alors une poule pond un oeuf en 3 jours et 5 poules pondront 5 oeufs en 3 jours. Donc, en 5 jours, 5 poules devraient pondre $5/3 \times 5$ oeufs $= 8\frac{1}{3}$ oeufs, plus précisément 8 oeufs.

b) Par le même raisonnement, on trouve que y poules pondront en y jours y^2/x oeufs, plus précisément le plus grand nombre entier contenu dans y^2/x d'oeufs.

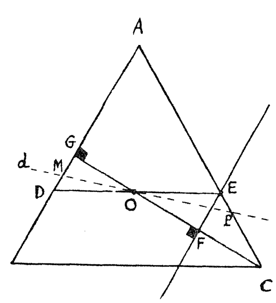
PROBLÈME 2. On peut examiner ici séparément le cas où $x > 0$ et celui où $x < 0$ dans la ou les solution(s). Dans le premier cas, le système devient: $3x + 4y = 11$, $-5x + 7y = 9$, d'où $x = 1$, $y = 2$. Dans le second cas, le système devient: $-3x + 4y = 11$, $-5x + 7y = 9$, d'où $x = -41$, $y = -28$. Il y a donc deux solutions.

PROBLÈME 3. a) Les triangles ABC et DAC sont semblables, car leurs angles sont respectivement égaux.

b) Le triangle ABD est isocèle et BD = AD. La similitude des triangles ABC et DAC permet d'écrire des proportions qui conduisent à l'égalité $(AD + DC) : (AB + AC) = DC : BC$, d'où $a^2 = b(b + c)$.

PROBLÈME 4. Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 999\}$. On considère les sous-ensembles suivants de E: celui des multiples de 3 appelé A, celui des multiples de 5 appelé B, et celui des multiples de 7 appelé C. Il s'agit donc de trouver d'abord le nombre d'éléments de $A \cup B \cup C$, puis sa différence avec 1000. Or, comme on peut le vérifier à l'aide d'un diagramme de Venn, $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) = 334 + 200 + 143 - 67 - 48 - 29 + 10 = 543$. Par suite, le nombre d'entiers cherché est $1000 - 543 = 457$.

PROBLÈME 5. Il faut d'abord prouver qu'il existe une valeur maximale de ce rapport. Soit le triangle équilatéral ABC de centre O. On trace DE parallèle à BC, CG perpendiculaire à AB et EF parallèle à AB, avec F sur CG. Soit une droite d passant par le centre O du triangle. Il suffit de considérer trois cas, selon que l'intersection M de d avec AB est le point G ou le point D ou un point situé entre G et D. (On ne perd pas ainsi en généralité puisque pour toute autre position de d, on pourrait mener une hauteur (analogue à



CG) et une parallèle à un côté (analogue à DE) de sorte que, par symétrie, le problème se ramènerait à l'un des trois cas qu'on va examiner ici.)

Dans chacun des cas, les triangles DOG et FOE sont congruents et ont la même aire, d'où:

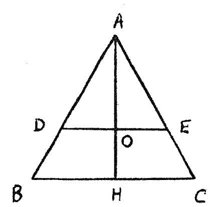
(aire de AGC) $\geqslant$ (aire de AMP) $\geqslant$ (aire de ADE)

et (aire de BGC) $\leqslant$ (aire de BMPC) $\leqslant$ (aire de BDEC).

Il s'en suit alors que: (aire de (ADE) : (aire de BDEC) $\leqslant$ (aire de AMP) :

(aire de BMPC) $\leqslant$ (aire de AGC) : (aire de BGC) $=$ 1.

Le maximum du rapport est donc atteint effectivement dans le deuxième cas, c'est-à-dire lorsque d est parallèle à BC.



Il reste à calculer ce rapport maximum. L'aire de ADE égale ½ (DE) (OA) $=$ ½ (2BC/3) (2OH) $=$ (2/3) (BC . OH). L'aire de BDEC égale ½ (BC + DE) . OH $=$ (5/6) (BC . OH). Donc le rapport (aire de ADE) : (aire de BDEC) égale 4/5).

PROBLÈME 6. a) On fait appel à la formule de changement de base pour les logarithmes. Alors $\log_y x \,.\, \log_x y = (\log_x x : \log_x y) \,.\, \log_x y = 1$ pourvu que $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ et $y \neq 1$.

b) Dans les mêmes conditions, l'équation donnée est équivalente à $\log_y (\log_y 2) = 0$, donc à $\log_y 2x = 1$ et à $y = 2x$. Le graphe cherché est donc une demi-droite issue de l'origine et de pente 2, amputée cependant des points (0,0) et (1,1).

PROBLÈME 7. Par le théorème de Thalès, on a $CC_1 : AA_1 = AC_1 : AB$ et $CC_1 : BB_1 = C_1B : AB_1$ d'où, en additionnant ces proportions membre à membre, puis en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par CC_1, on arrive à la conclusion demandée.

PROBLÈME 8. La clé du problème réside dans le fait que la petite aiguille est théoriquement suffisante pour lire l'heure sur une horloge (la grande aiguille ne venant qu'ajouter de la précision à la lecture). Supposons effectués le départ de la course à 10 heures et x minutes (avec $0 \leqslant x \leqslant 5$) et l'arrivée à 12 heures et y minutes (avec $50 \leqslant y \leqslant 55$). La coïncidence des aiguilles signifie que $x = 12 (y - 50)$ et que $y = 12x$. En résolvant ce système, on trouve que la durée de la course est de (12 h. + y min.) $-$ (10 h. + x min.) ou 2 heures, 46 minutes, 9.2 secondes.