LA NOTION D'ÉTENDUE

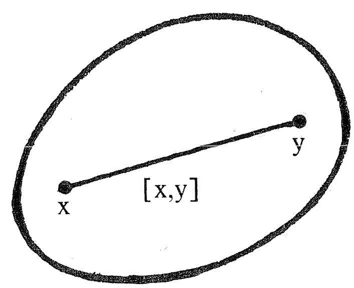
par Fernand LEMAY
et Edward NJOCK,
Sciences de l'Education,
Université Laval

L'intention d'une théorie des aires des polygones est d'associer à tout polygone une mesure numérique qui en exprime l' "étendue". Cependant l'aire ne caractérise pas les polygones: deux polygones distincts peuvent avoir même aire; de sorte qu'associer une aire aux polygones, c'est aussi les classifier.

Nous obtiendrons ici l'aire à la suite d'une classification des polygones que déterminera la relation "être de même étendue que".

POLYGONES

Une partie A d'un plan euclidien π est dite *convexe* si tout segment est contenu dans A dès que ses extrémité sont dans A:

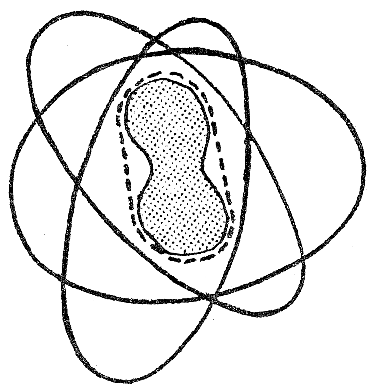


$$\{x,y\} \subset A \Longrightarrow [x,y] \subset A$$

([x,y] désigne le segment d'extrémités x et y).

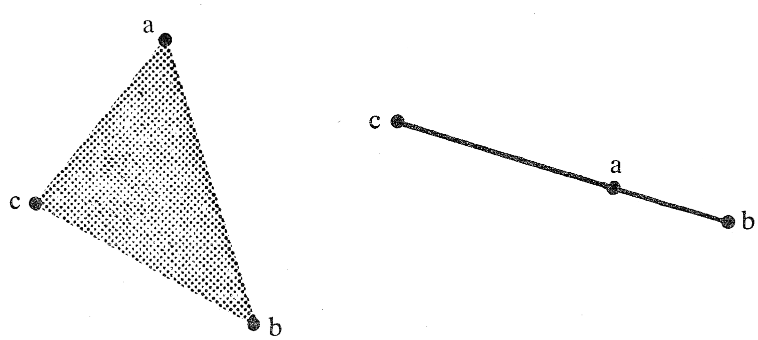
Un disque, une droite, un segment, un ensemble réduit à un point sont autant d'exemples de parties convexes du plan π.

La partie commune d'une collection quelconque (finie ou infinie) d'ensembles convexes est encore convexe comme on le vérifie aussitôt. En particulier la



collection des parties convexes contenant un ensemble donné A aura comme intersection un ensemble convexe contenant A et ce sera naturellement le plus petit des ensembles convexes contenant A; on dit que c'est l'*enveloppe convexe* de A.

Soient a,b,c des éléments de π, on appellera *triangle de sommets* a,b,c l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{a,b,c\}$.



La réunion $[a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$ des segments déterminés par les sommets constitue le *bord* du triangle; le bord d'un triangle T pourra se noter ∂T. L'*intérieur* d'un triangle T est l'ensemble, $\mathring{T}$, des points du triangle qui ne sont pas sur son bord:

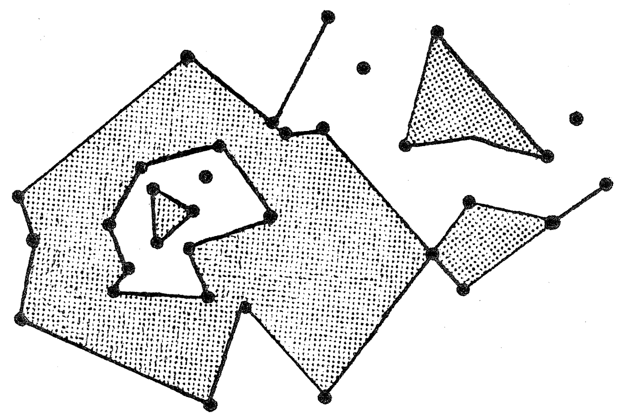
$$\mathring{T} = T - \partial T$$

Si tous les points d'un triangle T sont sur le bord ou, ce qui revient au même, si l'intérieur du triangle est vide,

$$T = \partial T, \qquad \mathring{T} = \phi,$$

on dira que T est un *triangle dégénéré*.

Nous appellerons *polygone* toute réunion d'un nombre fini de triangles. Un polygone est dégénéré si tous les triangles le sont. Voici représenté un polygone.



Une *triangulation* d'un polygone $P \subset \pi$ est une famille finie de triangles, $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, de réunion P et dont les intérieurs sont disjoints deux à deux.

ÉQUIVALENCES DE POLYGONES

Une colinéation du plan π est une permutation de π qui conserve l'ensemble des droites de π. Toute colinéation conserve aussi l'ensemble $\mathcal{P}$ des polygones du plan π. L'ensemble $\mathcal{C}$ des colinéations est un groupe (pour la loi de composition usuelle des fonctions) de transformations de π opérant dans $\mathcal{P}$.

DEFINITION. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ un sous-groupe du groupe des colinéations de π. *Deux triangles* T *et* T′ *sont dits* $\mathcal{G}$ *-équivalents* s'il existe un élément $g \in \mathcal{G}$ transformant l'intérieur de T en l'intérieur de T′: $g(\mathring{T}) = \mathring{T}'$. Les polygones dégénérés, par exemple, sont tous $\mathcal{G}$-équivalents (quel que soit $\mathcal{G}$).

Deux polygones P *et* P′ *sont dits* $\mathcal{G}$ *-équivalents et on écrit*

$$P \underset{\sim}{g} P'$$

(ou simplement $P \sim P'$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathcal{G}$), s'ils admettent des triangulations équivalentes, c'est-à-dire des triangulations $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(T'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ayant même ensemble d'indices et telles que les divers couples de triangles de même indice soient $\mathcal{G}$-équivalents.

Pour tout groupe $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, la $\mathcal{G}$-équivalence est une relation réflexive, symétrique et transitive dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des polygones du plan π; l'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\mathcal{P}/\mathcal{G}$.

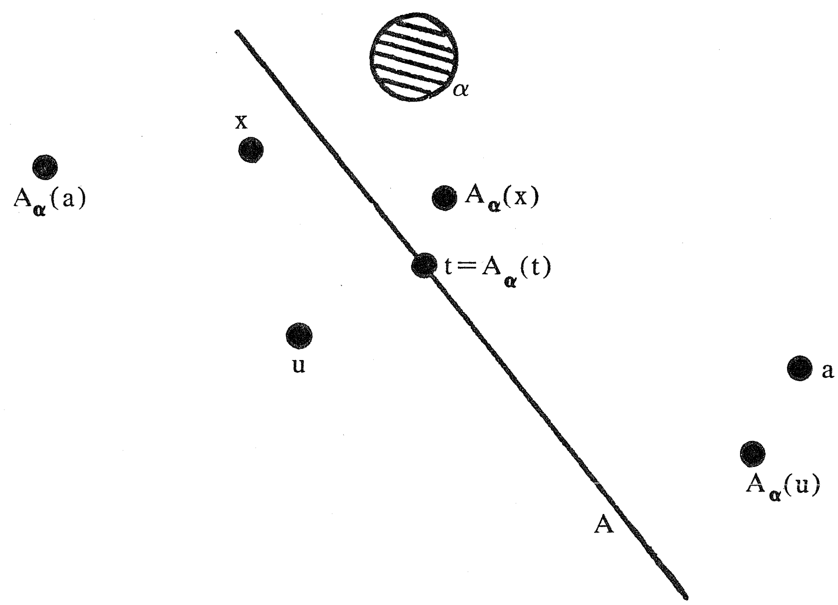
EXEMPLES. 1. $\mathcal{P} / \mathcal{C}$ est réduit à deux classes: la classe des polygones dégénérés et celle des polygones non dégénérés (cela provient de ce que $\mathcal{C}$ opère transitivement dans l'ensemble des triangles non dégénérés).

2. Si $\mathcal{G}$ est réduit à la transformation identique de π alors chaque polygone n'est $\mathcal{G}$ -équivalent qu'à lui-même.

3. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ est le groupe des similitudes du plan, alors on dira que $\mathcal{P} / \mathcal{G}$ est l'ensemble des formes polygonales.

ÉTENDUE

Soit une droite A et une direction α (distincte de la direction de A).



On appelle *symétrie d'axe A suivant la direction* α l'application $A_\varphi : \pi \longrightarrow \pi$ qui à tout $x \in \pi$ associe le point $y \in \pi$ tel que le segment $[x,y]$ soit contenu dans une droite de direction α et ait son milieu sur l'axe A.

Soit $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{C}$ engendré par l'ensemble de toutes les symétries suivant toutes les directions, alors on dira de *deux polygones* qu'ils *ont même étendue* s'ils sont $\mathcal{G}$ -équivalents. Dans la suite $\mathcal{G}$ ne désignera plus que le sous-groupe de $\mathcal{C}$ engendré par les symétries.

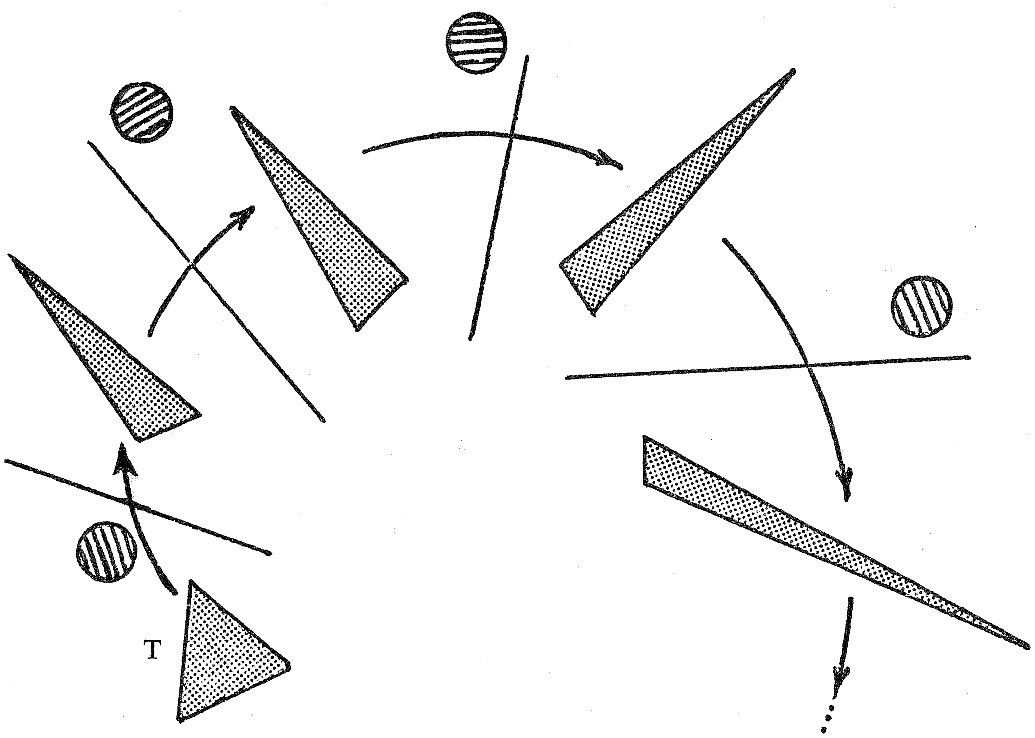
ORBITES ET ÉQUIVALENCE

La collection des triangles ayant même étendue qu'un triangle donné T n'est autre que l'ensemble

$$\mathcal{G}(T) = \{g(T) \mid g \in \mathcal{G}\}$$

des transformés de T; cet ensemble $\mathcal{G}(T)$ constitue l'*orbite du triangle T.*

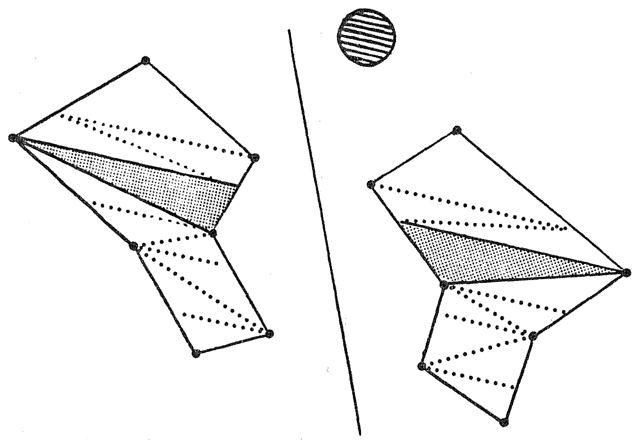
Voici par exemple quelques éléments de l'orbite d'un triangle T:



Essentiellement deux polygones sont $\mathcal{G}$ -équivalents dès qu'une triangulation de l'un se déduit d'une triangulation de l'autre en y remplaçant les triangles par des triangles de même orbite.

INTERPRÉTATION INTUITIVE

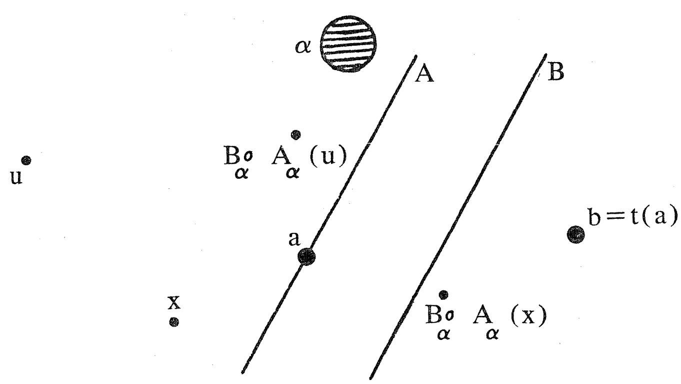
Deux polygones symétriques ont en commun des caractères suffisamment importants pour qu'on dise qu'ils sont de même étendue.



En effet deux polygones symétriques admettent des triangulations équivalentes telles que les couples de triangles correspondants soient de bases et de hauteurs égales.

Les polygones déduits les uns des autres par translation sont $\mathcal{G}$ -équivalents (donc de même étendue).

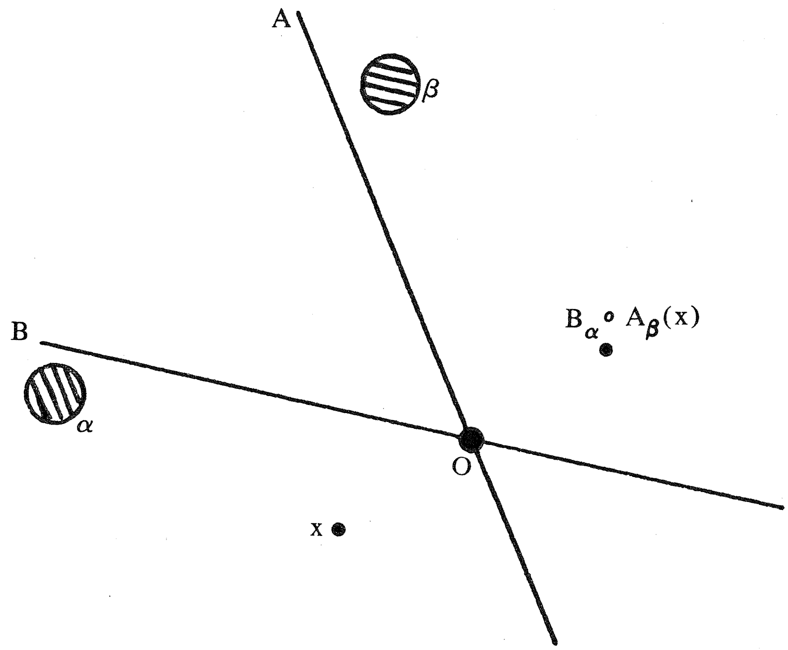
En effet il suffit de remarquer que le groupe $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ engendré par les symétries contient l'ensemble des translations du plan. Considérons par exemple la translation t appliquant a en b (distinct de a).



Alors t coïncide avec la composée $B_\alpha \circ A_\alpha$ (α désignant la direction déterminée par a et b, A et B désignant des droites parallèles comprenant respectivement a et le milieu du segment [a,b]).

Les polygones déduits les uns des autres par symétrie centrale sont $\mathcal{G}$ -équivalents.

En effet le groupe $\mathcal{G}$ contient aussi l'ensemble des symétries centrales. Par exemple la symétrie de centre O



coïncide avec la composée $B_\alpha \circ A_\beta$ des symétries (dites conjuguées) d'axes A et B comprenant O suivant les directions α et β déterminées par A et B respectivement.

Plus généralement:

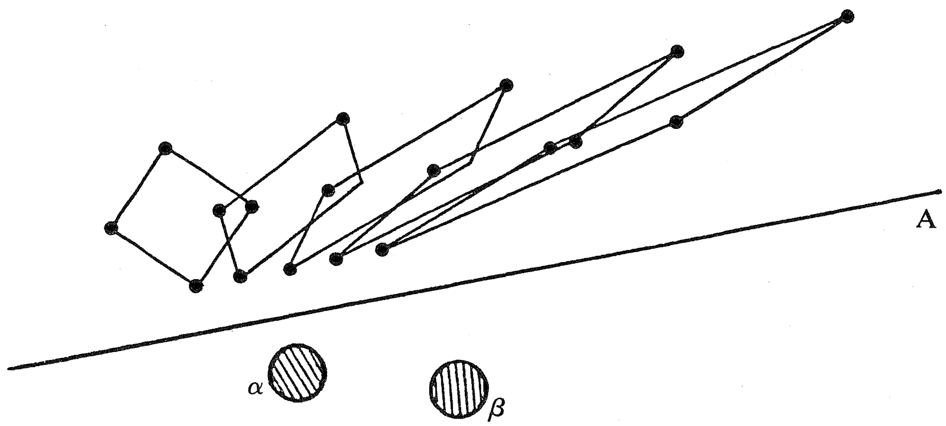
> *Les polygones déduits les uns des autres par isométrie sont $\mathcal{G}$ -équivalents.*

On sait en effet que les isométries ne sont autres que les composées de symétries orthogonales.

COMPARAISON DES ÉTENDUES

La tradition scolaire nous a habitués à traiter les questions d'étendue par "transport de pièces rigides" donc par isométrie. Le groupe $\mathcal{G}$ contient en outre des transformations non isométriques qui augmentent d'autant notre pouvoir d'action sur les figures géométriques, ce qui présente par conséquent un avantage didactique certain. Voici à titre d'exemples quelques résultats utiles.

Les polygones déduits les uns des autres par transvection sont de même étendue.

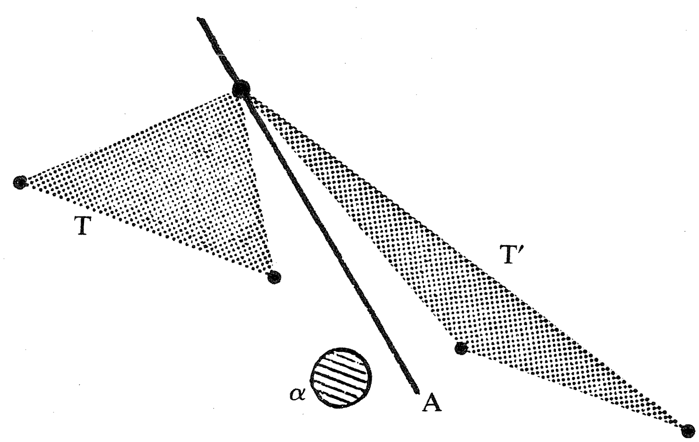


Une transvection est en effet le composé de deux symétries A_α et A_β d'axe commun.

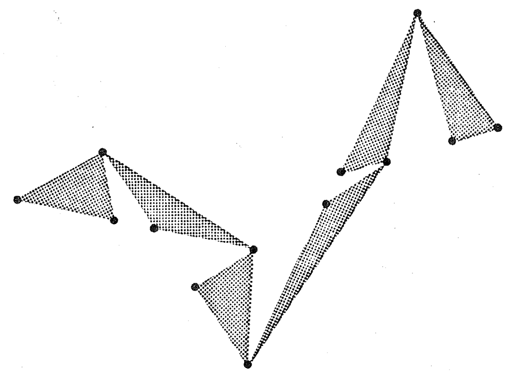
Les triangles déduits les uns des autres en "glissant" un des côtés sur son support appartiennent à une même orbite.

Voici en effet deux tels triangles ainsi qu'une symétrie A_α transformant l'un en l'autre:

$$A_\alpha(T) = T'.$$



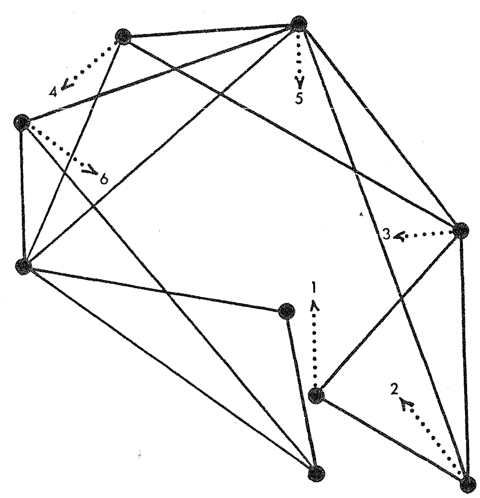
On peut même établir que l'orbite entière d'un triangle peut s'obtenir de proche en proche au moyen de transformations du type précédent[1], d'où un amusant "jeu de golf": voici une séquence conduisant du triangle T au triangle T′ n'utilisant que le glissement d'un côté sur son support.



Pouvait-on réussir en moins d'étapes? Ou encore, deux triangles de même étendue étant donnés, comment atteindre l'un à partir de l'autre? Et si deux triangles sont donnés arbitrairement, peut-on "lancer" l'un à l'intérieur de l'autre? Les contraintes du jeu varieront à mesure qu'augmentera la familiarisation.

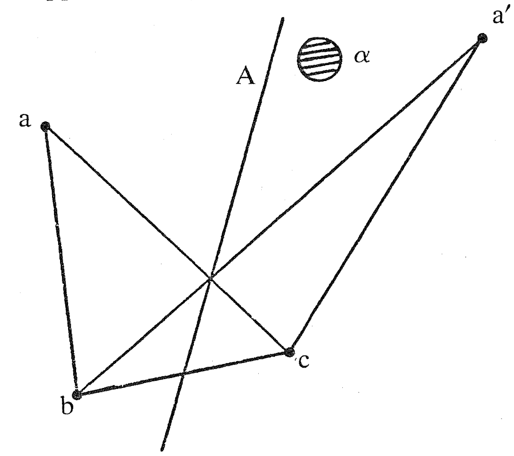
Voici d'ailleurs d'autres résultats suggérant des jeux analogues.

Les triangles déduits les uns des autres par translation d'un sommet dans la direction du côté opposé constituent une orbite.



(1) Bien entendu le cas de triangles dégénérés supposerait qu'on explicite alors la signification de certains termes.

En effet si T′ se déduit de T en glissant un sommet de a en a′ dans la direction α du côté opposé [b,c],

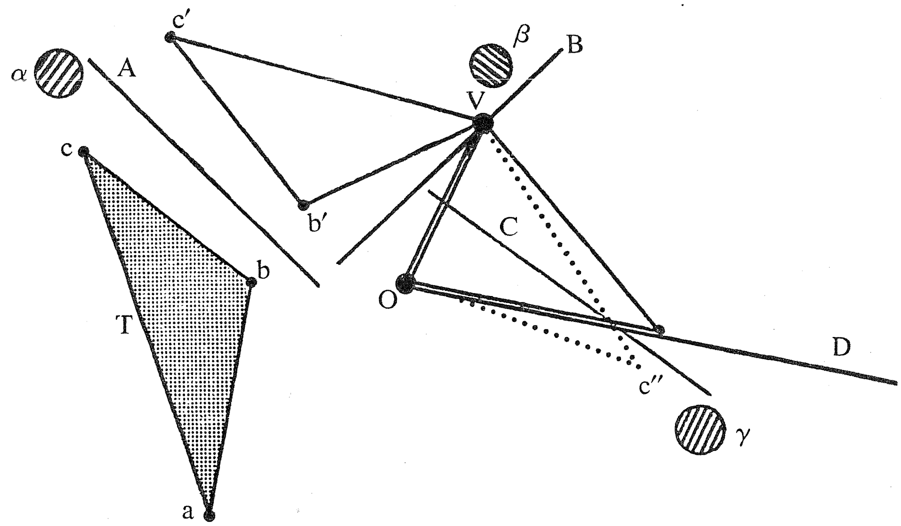


alors $T' = A_{\alpha}(T)$, l'axe A comprenant les milieux de [a,a′] et de [b,c].

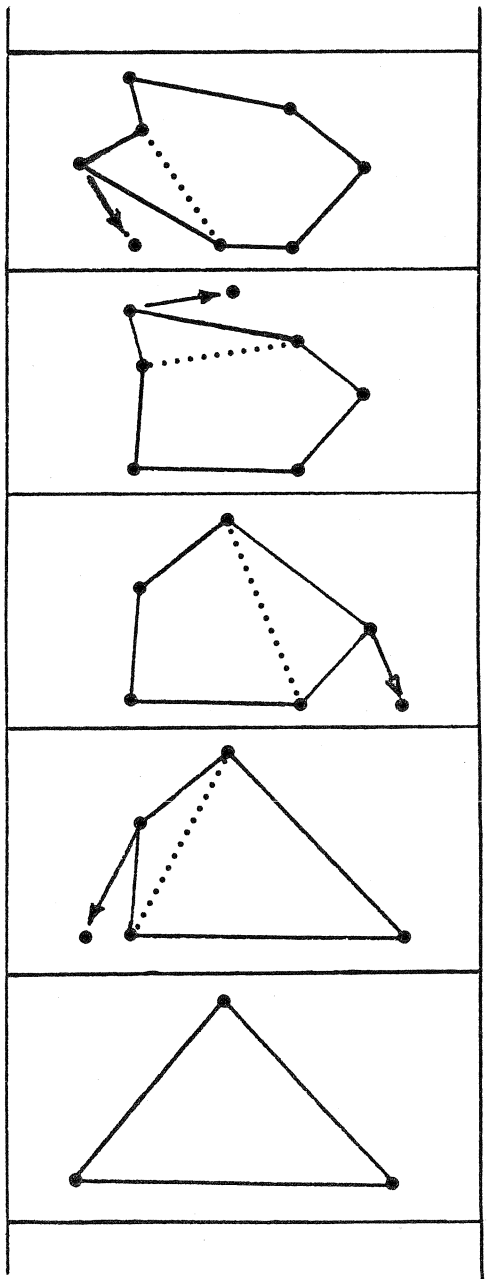
Tout polygone est $\mathcal{G}$ -équivalent à un triangle.

Illustrons ce résultat en présentant le film d'une transformation d'un polygone en un rectangle *(sur la page suivante).*

Tout triangle peut être transformé en un triangle de même étendue "inscrit" dans un couple donné constitué d'une demi-droite D issue d'un point O et d'un segment [O,V] (non contenu dans le support de D).



Tout polygone est $\mathcal{G}$*-équivalent à un triangle.*



Par exemple dans le schéma ci-dessus le triangle T est transformé en un triangle inscrit dans le couple ([O,V], D) au moyen de la transformation $C_\gamma \circ B_\beta \circ A_\alpha$, telle que:

$$A_\alpha(a) = V$$
$$B_\beta(b') = O, \text{ où } b' = A_\alpha(b)$$
$$C_\gamma(c'') \in D, \text{ où } c'' = B_\beta \circ A_\alpha(c)$$

(et bien sûr $C_\gamma(O) = V$, $C_\gamma(V) = O$).

AIRE

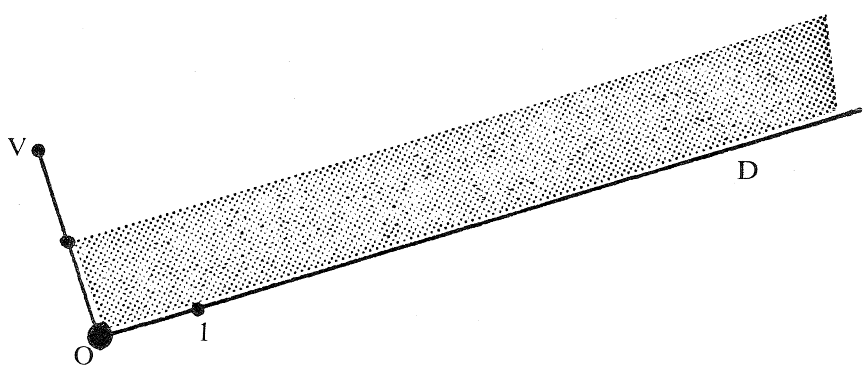
Le problème de l'aire est celui de la paramétrisation des étendues; de façon précise il s'agit de définir une application

$$\mathcal{P} / \mathcal{G} \longrightarrow R_+^*$$

associant à toute étendue une mesure numérique positive, ou encore, de définir une application m : $\mathcal{P} \longrightarrow R_+^*$ telle que des polygones $\mathcal{G}$-équivalents se voient associer le même nombre:

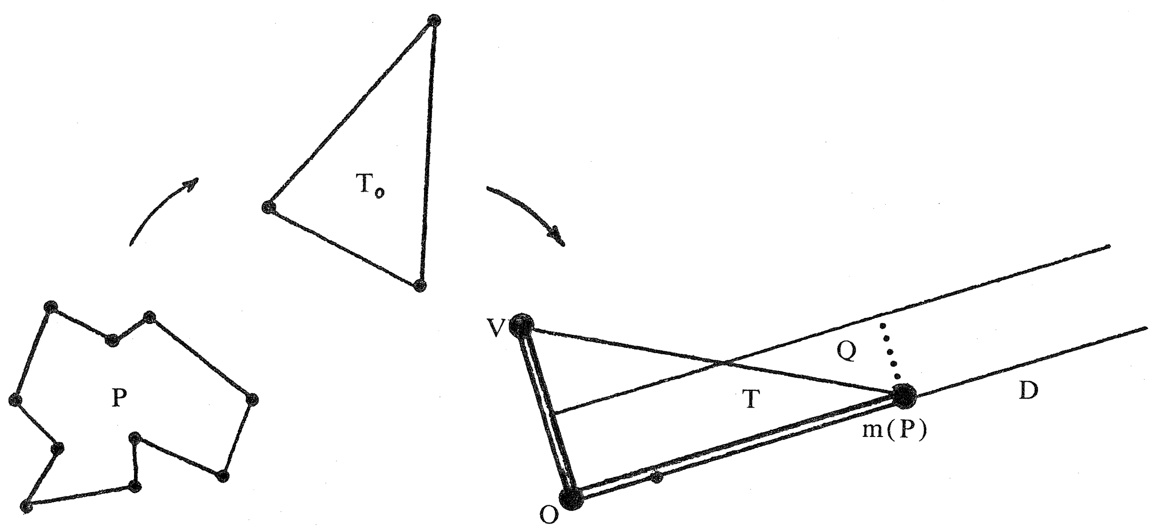
$$P \sim P' \Longrightarrow m(P) = m(P').$$

Soient D une demi-droite graduée (de façon homogène)



au moyen de laquelle on construit une demi-bande d'épaisseur 1, et un segment [O,V] de longueur 2 (qu'il n'est pas nécessaire de choisir perpendiculaire à D).

Tout polygone $P \in \mathcal{P}$ se transforme en un triangle $\mathcal{G}$-équivalent T_0.



Celui-ci se transforme à son tour en un triangle $\mathcal{G}$-équivalent T inscrit dans le couple (D,OV) (puis, mais cela est superflu, en un parallélogramme Q inscrit dans la demi-bande), d'où un point $p \in D$.

On démontre que des polygones $\mathcal{G}$-équivalents déterminent de la sorte un même point de la demi-droite graduée.

On peut donc associer au polygone $P \in \mathcal{P}$ et à tous les polygones $\mathcal{G}$-équivalents l'abscisse du point $p \in D$ définissant ainsi l'application

$$m : \mathcal{P} \longrightarrow R_+^*$$

que nous avions en vue. Cette fonction m sera dite une *aire* et pour tout $P \in \mathcal{P}$, m(P) sera appelé l'*aire de P*.

On fournit donc une paramétrisation de l'ensemble $\mathcal{P} / \mathcal{G}$ après avoir mis au point une notion géométrique d'étendue renversant ainsi la tradition de l'enseignement élémentaire qui veut que deux polygones ne soient équivalents que si on sait par avance calculer leurs étendues.

Université Laval
Février 1969.