Le Coin du problème

Rédacteur: Gabriel Garneau, Ecole Polytechnique, Montréal.

CONCOURS DE PROBLÈMES

Les problèmes qui suivent font l'objet d'un concours auquel nous invitons tous nos lecteurs à participer. Les solutions reçues et jugées les plus intéressantes par leur originalité mériteront à leurs auteurs des prix sous forme de publications mathématiques. Faire parvenir vos solutions à Gabriel Garneau, département de mathématique, Ecole Polytechnique, 2500 avenue Marie-Guyard, Montréal 250, Québec.

PROBLÈME 1

Une "suite de Fibonacci" $\{F_n\}$ est définie ainsi:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . . ,

c'est-à-dire que $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, . . . , $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Existe-t-il, parmi les 100,000,001 premiers termes de cette suite, un nombre se terminant par quatre zéros?

PROBLÈME 2

Quels restes peut-on obtenir lorsqu'on divise la centième puissance d'un nombre naturel par 125?

PROBLÈME 3

Le nombre *0.1234567891011121314* . . . (obtenu en écrivant successivement tous les nombres naturels) est-il rationnel?

PROBLÈME 4

Compléter *523* . . . à l'aide de trois chiffres, de façon que le nombre de six chiffres obtenu soit divisible à la fois par 7, 8 et 9.

ERRATUM

Dans le problème 3 du dernier numéro (volume XI, numéro 2, page 38), la borne supérieure de l'intégrale à évaluer devrait se lire 2π et non 2. Le lecteur est invité à tenter de résoudre ce problème intéressant qui, incidemment, a pour réponse $-\pi$.

SOLUTIONS

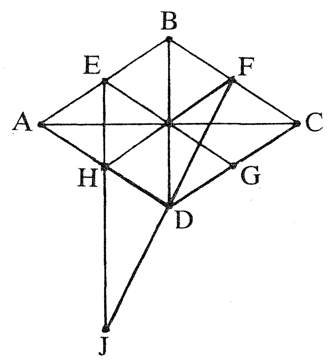
Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro de novembre dernier (volume XI, numéro 1).

Félicitations à M. Gaston BERTRAND, de Montréal, qui s'est mérité un prix pour sa solution originale du problème 4 (reproduite ici).

PROBLÈME 1

On veut planter dix arbres. Comment doit-on procéder si l'on désire que ces dix arbres forment dix rangées de trois arbres par rangée?

Solution (proposée par Réal Ricard, Trois-Rivières)



E, F, G, H sont les points milieux des côtés du losange ABCD; I est le point d'intersection de ses diagonales; J est le point d'intersection de EH et de FD.

On a donc ici une géométrie de 10 points, alignés trois à trois sur dix droites.

PROBLÈME 2

Si le produit de *673,106* par *4,783,205,468* est *3,219,60*,299,743,608,* trouver le chiffre manquant (remplacé par *) sans effectuer la multiplication.

Solution (proposée par Guy-W. Richard, E.N.E.T., Montréal)

$673{,}106 \equiv 5$ (modulo 9) et $4{,}783{,}205{,}468 \equiv 2$ (modulo 9). Il faut donc que leur produit 3, 219,60*,299,743,608 soit congru à $5 \times 2 \equiv 10 \equiv 1$ (modulo 9). Or ce produit est congru à $6 + *$ (modulo 9). Donc $6 + * \equiv 1$ (mod 9), d'où $* \equiv 4$ (mod 9). La seule valeur possible pour * est 4.

Remarque

Monsieur Richard, qui nous a fait parvenir cette solution, nous signale qu'elle ne répond quand même pas aux exigences du problème posé, lequel spécifiait qu'il ne fallait *pas* effectuer de multiplications. Or, dans la solution qui précède, il faut effectuer le produit 5×2 (modulo 9). Ce scrupule de M. Richard tend à prouver que l'honnêteté intellectuelle n'est sûrement pas à la baisse, chez les professeurs d'écoles normales en particulier!

PROBLÈME 3

Solution (proposée par Mlle Lucille Forest, Bromptonville)

```
(1) 1 0 0 0 0 7 8 9 2 | 3 3 3           (2) 3 0 0 3 2 4 | 2 9
      9 9 9             300324              2 9           10356
      -----                                 ---
        1 0 7 8                               1 0 3
          9 9 9                                 8 7
          -----                                 ---
            7 9 9                                 1 6 2
            6 6 6                                 1 4 5
            -----                                 -----
            1 3 3 2                                 1 7 4
            1 3 3 2                                 1 7 4
            -------                                 -----
```

PROBLÈME 4

Quatre jetons sont lancés simultanément, trois fois de suite. Les jetons portent respectivement au recto et au verso les nombres suivants: 1 et 0 sur le premier; 2 et 0 sur le deuxième; 4 et 0 sur le troisième; 8 et 0 sur le quatrième. Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus aux trois lancers soit comprise entre 20 et 40 (20 et 40 compris)?

Solution (proposée par Gaston Bertrand, Montréal)

Lancer les jetons en l'air trois fois, puis faire le total des points obtenus revient à lancer en même temps trois jetons de chaque espèce, c'est-à-dire trois jetons marqués 0 et 1, trois jetons marqués 0 et 2, trois jetons marqués 0 et 4 et trois jetons marqués 0 et 8.

$$\text{Soit } P=(x^0+x)\,(x^0+x)\,(x^0+x)\,(x^0+x^2)\,(x^0+x^2)\,(x^0+x^2)$$
$$(x^0+x^4)\,(x^0+x^4)\,(x^0+x^4)\,(x^0+x^8)\,(x^0+x^8)\,(x^0+x^8).$$

Si on considère la définition de P, on constate que le coefficient de x^n dans dans ce produit indique de combien de façons on obtient x^n en multipliant l'un par l'autre deux termes des douze facteurs binômes et que de plus n est égal à la somme des exposants des monômes tirés des facteurs binômes. Or ces exposants sont précisément les nombres apparaissant sur les faces des jetons. Il s'en suit que le nombre de manières d'obtenir une somme égale à n est donné par le coefficient de x^n dans P. Le nombre de manières d'obtenir une somme ou une autre est donc de $2^{12}=4096$, selon la formule du binôme de Newton. Chacune de ces manières est équiprobable. Par conséquent, la probabilité d'obtenir une somme égale à n est égale au quotient du coefficient de x^n dans P par 4096.

$$\text{Or } P=[(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,(1+x^8)]^3 = (1-x^{16})^3/(1-x)^3.$$

La probabilité que la somme obtenue n soit un nombre entier de l'intervalle [20,40] égale donc la somme des coefficients de x^n pour $n=1, 2, \ldots, 40$ diminuée de la somme des coefficients de x^n pour $n=1, 2, \ldots, 19$, le tout divisé par 4096.

Considérons maintenant $Q = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)\ (1 + x + x^2 + \ldots)$. La somme $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ est égale au coefficient x^n dans Q. Mais $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/(1-x)$. Ce résultat est valide pour x compris entre -1 et 1, mais cela n'impose aucune restriction au problème étudié ici puisque la variable x n'intervient pas dans les calculs.

La probabilité demandée est donc égale au coefficient de x^{40} diminué du coefficient de x^{19} dans l'expression

$$\frac{1}{4096} \times \frac{(1-x^{16})^3}{(1-x)^3} \times \frac{1}{1-x} = \frac{1}{4096} \quad \frac{(1-x^{16})^3}{(1-x)^4}$$

$$= (1-x^{16})^3\ (1-x)^{-4} = (1-3x^{16} + 3x^{32} - x^{48}) \left[\frac{1.2.3 + 2.3.4x + \ldots + (r+1)\ (r+2)\ (r+3)x^r + \ldots}{1.2.3}\right]$$

Par conséquent, le coefficient C_{40} de x^{40} dans cette expression est

$$C_{40} = \frac{(41.42.43) - (3.25.26.27) + (3.9.10.11)}{1.2.3} = 4061;$$

de même, on a $C_{19} = \dfrac{(20.21.22) - (3.4.5.6)}{1.2.3} = 1480.$

Finalement $\dfrac{1}{4096}\ [C_{40} - C_{19}] = \dfrac{2581}{4096}$ est la probabilité cherchée.

(suite de la page 60)

Cependant, nous ne saurions trop attirer l'attention des maîtres du Secondaire et de ceux qui sont chargés d'élaborer les nouveaux programmes aussi bien en physique qu'en mathématique sur le fait que les recommandations du colloque de Lausanne devraient être lues et examinées avec beaucoup de soin et qu'on pourra utiliser ces dernières comme un acquis dans toute réflexion qu'on voudra féconde sur la réforme et la coordination des enseignements de mathématiques et de physique.