CONCOURS ANNUEL 1968 DE L'A.M.Q.
(cf. pages 79-80 du Bulletin de janvier 1969)

SOLUTIONS

PROBLÈME 1. On vérifie que $a^3 + b^3 - (a+b)ab = (a+b)\,(a-b)^2 \geqslant 0$. Donc $a^2 + b^3 \geqslant ab(a+b)$. De même $b^3 + c^3 \geqslant bc(b+c)$ et $a^3 + c^3 \geqslant ac(a+c)$. La conclusion s'obtient par l'addition membre à membre de ces trois inégalités.

PROBLÈME 2. Soit $P(z^n) = (z^n)^{k!/n} - 1 = z^{k!} - 1$. On a $P(1) = 0$ et donc, par le théorème du reste, $z^n - 1$ divise $P(z^n)$. [Puisque $n \leqslant k$, on pouvait supposer ici que $k!/n$ est un nombre entier.]

PROBLÈME 3. On a $y = x^{1/2}\, x^{1/4}\, x^{1/8} \ldots = x^{(1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots)} = x$, puisque l'exposant est la somme d'une série géométrique infinie. Donc $y' = 1$. [*Autre méthode*: $y^2 = xy$, donc $y = x$ et $y' = 1$.]

PROBLÈME 4. On pose $x = \log_2 \pi$ et $y = \log_5 \pi$. Il s'agit alors de démontrer que $^1/x + ^1/y > 2$. On a $\pi = 2^x = 5^y$, d'où l'on tire $\log \pi = x \log 2 = y \log 5$. Par suite, $^1/x + ^1/y = (\log 2 + \log 5) \ / \ (\log \ \pi) = (\log 10) \ / \ (\log \pi) > 2$, puisque $\pi^2 < 10$ et $2 \log \pi < \log 10$.

PROBLÈME 5. (*Solution de Gilbert Labelle*) On a $(x+y)\ (x-y) = 2^n$. Puisque l'on cherche des solutions entières, il faut que $x+y$ et $x-y$ soient des entiers et divisent 2^n. On peut donc poser $x+y = 2^t$ et $x-y = 2^{n-t}$ pour $0 \leqslant t \leqslant n$. Il s'en suit que $x = 2^{t-1} + 2^{n-t-1}$ et $y = 2^{t-1} - 2^{n-t-1}$. Comme x et y doivent être des entiers positifs, il faut que $1 \leqslant t \leqslant n-1$, que $2^t \geqslant 2^{n-t}$ et donc que $t \geqslant n-t$. Par suite, on doit avoir $1 \geqslant ½ n$. Les solutions cherchées sont donc données par $x = 2^{t-1} + 2^{n-t-1}$ et $y = 2^{t-1} - 2^{n-t-1}$ pour $½ n \leqslant t \leqslant n-1$.

PROBLÈME 6. On mène le segment O_2M perpendiculaire à AB avec M situé sur AB. Puisque O_2M est parallèle à O_3B, il s'en suit que O_2M mesure $3r/5$. A l'aide du théorème de Pythagore, on déduit alors que RS mesure $2\sqrt{r^2 - 9r^2/25}$ ou $8r/5$.

PROBLÈME 7. La longueur de la ligne brisée $P_0P_1P_2 \ldots P$ est égale à $1+2+3+\ldots+n = ½ n(n+1)$. Or ce nombre est inférieur ou égal à n^2, puisque $n^2-1 \geqslant 0$ (car $n \geqslant 1$). La courbe donnée, dont la longueur excède n^2, ne peut donc être cette ligne brisée.

PROBLÈME 8. Il suffit de calculer de combien de façons on peut faire évacuer quinze sièges déjà occupés, en procédant dans l'ordre inverse de celui décrit dans la donnée du problème. A cause de la façon de prendre place dans les sièges, on ne peut faire évacuer les quinze sièges qu'en commençant par vider un siège extrême. Il y a donc *deux* manières de faire évacuer la première personne. Par la même argumentation, il y a *deux* façons de faire évacuer la deuxième, *deux* pour la troisième, etc. Le nombre demandé est donc de 2^{14}.

PROBLÈME 9. (*Solution de Gilbert Labelle*) Dans la figure (B), on inscrit les lettres A. B et C tel qu'indiqué. Chaque fois qu'on place une pièce de la forme (A), on recouvre inévitablement les lettres A, B et C une et une seule fois. Or si une solution était possible, il s'en suivrait que l'on recouvrirait exactement 15 fois A, 15 fois B et 15 fois C. Il y aurait donc en tout autant de lettres de chaque sorte, ce qui est *faux* car il y a 16 fois A, 16 fois B et 13 fois C.

	A	B	C	A	B	
A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
	A	B	C	A	B	

ERRATA

Sur la seconde couverture (intérieure) des deux derniers numéros du Bulletin, une erreur typographique s'est glissée dans le nom de M. JACQUES BERGERON, auprès de qui nous nous excusons. Dans le numéro de janvier 1969, il faut également faire les corrections suivantes: p. 21, ligne -13, lire *structure;* p. 35, ligne -11, lire "par des *mathématiciens*..."; p. 14; dans la section 1 de la machine, devraient figurer trois bâtonnets chacun de longueur équivalente à *quatre* cubes; p. 79, le titre devrait naturellement se lire *CONCOURS ANNUEL 1968,* tout comme dans la table des matières; enfin, p. 80, dans l'errata (!), il fallait lire O_2 et non O_3.