

E

“Que l’humanité ait adopté le système décimal, il s’agit là d’un accident physiologique. Ceux qui voient en tout l’action de la Providence devront admettre que sur ce point la Providence a été un piètre mathématicien. Car la base dix n’offre guère d’avantages, si ce n’est du point de vue physiologique. A peu près n’importe quelle autre base, sauf peut-être la base neuf, aurait été aussi bien choisie, probablement mieux.”

(Tobias Dantzig, *Number, the language of science*)

LA MACHINE À COMPTER: UN INSTRUMENT PÉDAGOGIQUE SIMPLE ET DE GRANDE VALEUR*

ACTIVITÉS POUR LE NIVEAU ÉLÉMENTAIRE

SUJET: SYSTÈMES DE NUMÉRATION À VALEUR POSITIONNELLE

fiches préparées par Marcel HAMEL, coordonnateur de l’enseignement
des mathématiques à la Commission
des Ecoles Catholiques de Sherbrooke

PRÉSENTATION

Les fiches suivantes furent originalement préparées pour utilisation à l’occasion d’ateliers regroupant des maîtres de l’Elémentaire. Nous suggérons aux enseignants de les modifier et de les adapter, pour les transformer en des fiches de travail destinées à leurs élèves. Ils pourront également choisir à leur gré le matériel à utiliser avec la “machine à compter”. En classe, une courte *activité collective* permettrait d’abord de familiariser les enfants avec la “machine” et le matériel choisi, après quoi on pourrait procéder à un *travail individuel ou en équipe* à l’aide des fiches de travail et du matériel.

La “machine à compter” constitue, au niveau élémentaire, un instrument pédagogique de grande valeur pour l’apprentissage des bases de numération, surtout si on l’utilise parallèlement à des matériels structurés, des arbres¹, etc.

En plus de reproductions grand format de la “machine à compter”, on aura besoin, en classe ou en atelier, d’objets à compter. On pourra prendre des jetons ou des boutons ou des réglottes ou des cubes, etc. Cependant on pourra utiliser avec

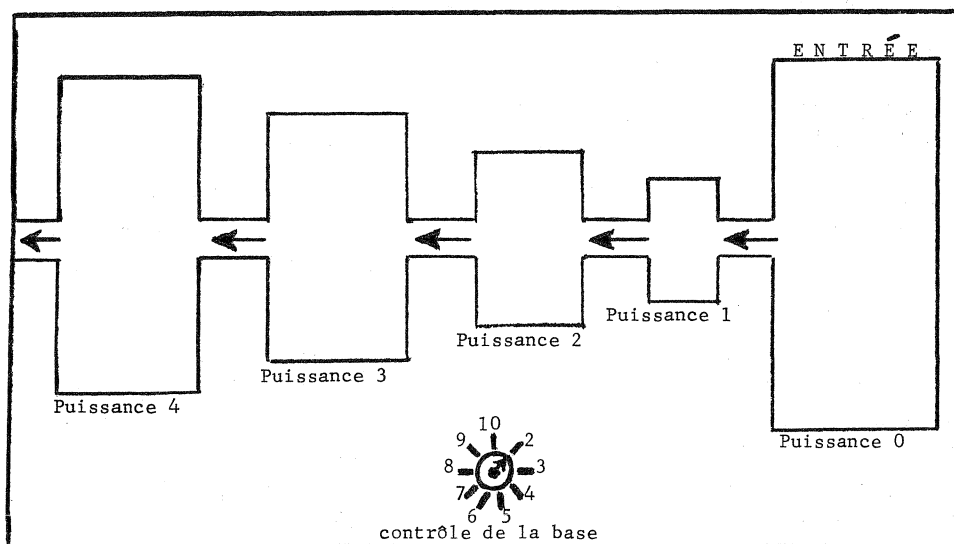
* Nous remercions M. Hamel et la Commission Scolaire de Sherbrooke pour la permission qu’ils nous ont donnée de reproduire ces fiches et pour leur collaboration. Quelques modifications y ont été apportées, avec la permission de l’auteur. (N.D.L.R.)

1. Voir “*Les aventures de Polymath et de Polyglotte*”, fiches de travail préparées par Marcel Hamel et parues dans le numéro de novembre 1968 du Bulletin de l’A.M.Q.

avantage des réglottes Cuisenaire ou des blocs multibases ou des cubes Polymath² ou tout matériel équivalent qui permet de remplacer de façon naturelle un groupe de n objets par un nouvel objet (réglotte ou bloc de volume équivalent, cubes emboîtés, paquets d'objets attachés à l'aide de bandes élastiques, etc.). On pourra encore utiliser des jetons de couleurs variées, en convenant que n jetons d'une couleur peuvent être remplacés par un jeton d'une autre couleur.

LA "MACHINE À COMPTER"

La "machine à compter", reproduite ci-dessous, peut fonctionner dans les bases de numération de 2 à 10. Son *entrée* est à l'extrême droite. Seules les cinq premières sections de la machine ont été représentées ici. La manette de contrôle placée au bas sert à régler la machine pour qu'elle fonctionne dans une base donnée.



PREMIÈRE ACTIVITÉ

Dénombrement dans une base donnée

1. Régler la machine pour qu'elle fonctionne dans la base *deux*. Placer dans l'entrée un ensemble initial d'objets. Actionner la machine !

Les éléments de l'ensemble initial (placés dans la section 0) sont alors introduits par paires dans la section 1. Comme la machine fonctionne dans la base *deux*, chaque fois que deux éléments arrivent dans la section 1, ils sont aussitôt réunis pour former *un* ensemble de deux objets. (Pour mieux le

2. Le matériel Polymath est un matériel créé par l'auteur. (N.D.L.R.)

montrer, on peut remplacer chaque paire d'éléments par un nouvel objet équivalent ou bien attacher ensemble les deux éléments.) Lorsque la section 1 contient à son tour deux éléments, c'est-à-dire deux paires d'objets, ils sont introduits dans la section suivante, où ils formeront *un* nouvel objet. Et le processus se continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus, dans les sections de la machine, de paires d'éléments à amener dans la section suivante. La machine s'arrête alors de fonctionner; on peut voir le résultat obtenu.

Supposons par exemple que l'on aboutisse finalement au résultat suivant:

Puissance 4	Puissance 3	Puissance 2	Puissance 1	Puissance 0
/	0	0	/	/

ce qui signifie: 1 ensemble de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ éléments de l'ens. initial (1×2^4),
 0 ensemble de $2 \times 2 \times 2$ éléments de l'ens. initial (0×2^3),
 0 ensemble de 2×2 éléments de l'ens. initial (0×2^2),
 1 ensemble de 2 éléments de l'ens. initial (1×2^1),
 1 ensemble de 1 élément de l'ens. initial (1×2^0).

Dans un tel cas, il fallait donc avoir dix-neuf éléments dans l'ensemble initial.

Dans la base *deux*, ce nombre s'écrit $10011_{(deux)}$

- Régler maintenant la machine pour qu'elle fonctionne dans la base *trois*. Utiliser le même ensemble initial que dans la partie 1. Actionner la machine ! Inscrive ensuite le résultat fourni par la machine, puis le nombre d'éléments de l'ensemble initial, exprimé dans la base *trois*.

3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

(trois)

- Recommencer, mais en faisant fonctionner la machine dans la base *quatre*.

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0

(quatre)

4. Recommencer, mais en faisant fonctionner la machine dans la base *cinq*.

5^6	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

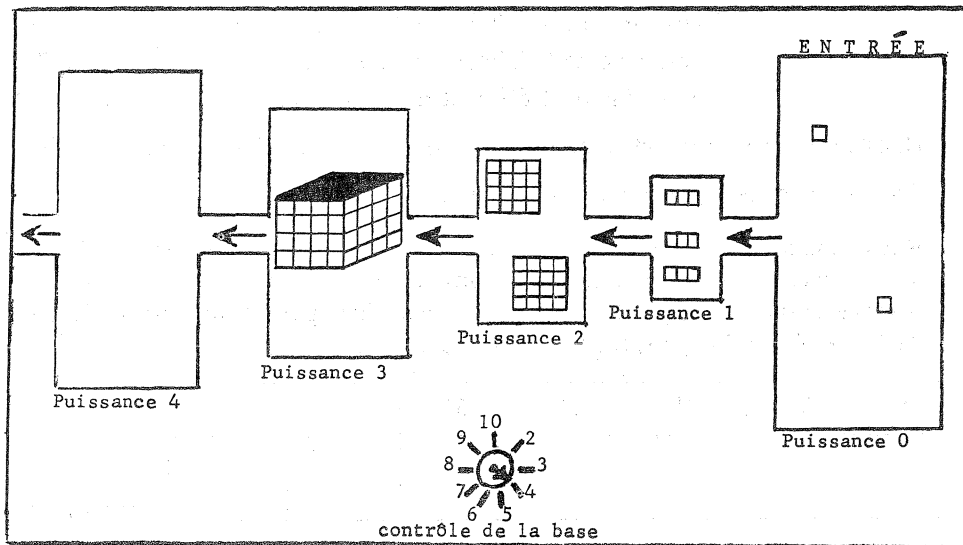
(cinq)

5. Recommencer dans chacune des bases *six*, *sept*, *huit*, *neuf* et *dix*.

6. Imaginer une machine semblable qui pourrait fonctionner dans d'autres bases. Refaire avec elle le même travail que précédemment, dans les bases *onze* et *douze*.

DEUXIÈME ACTIVITÉ

Addition avec retenue dans une base donnée



1. La machine à compter, fonctionnant dans la base *quatre*, a donné le résultat qu'indique la figure en dénombrant les éléments d'un ensemble d'objets. Introduire maintenant de nouveaux éléments: trois dans la section 0 et deux directement dans la section 2. Actionner à nouveau la machine. Que trouve-t-on ?

2. Traduction de l'opération en symboles numériques (les nombres sont écrits dans la base *quatre*):

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 2 \\ +\ 2\ 0\ 3 \\ \hline 2\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

Comparer les opérations de la machine avec celles que l'on fait en calculant directement avec les symboles numériques.

3. Imaginer des problèmes semblables d'addition avec retenue, mais dans d'autres bases, à partir de nombres de votre choix. Résoudre aussi ces problèmes par écrit.

TROISIÈME ACTIVITÉ

Soustraction avec emprunt dans une base donnée

1. La machine à compter, fonctionnant dans la base *quatre*, a produit le résultat qu'indique la dernière figure en dénombrant les éléments d'un ensemble d'objets. Faire fonctionner cette fois la machine à l'inverse (*la soustraction est l'inverse de l'addition!*), de façon à en retirer trois éléments de la section 0, ainsi que trois ensembles de la section 2. Après avoir retiré ces objets, quel résultat donnera la machine lorsqu'elle s'arrêtera de fonctionner?
2. Traduction de l'opération en symboles numériques (les nombres sont écrits dans la base *quatre*):

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 2 \\ -\ 3\ 0\ 3 \\ \hline 3\ 2\ 3 \end{array}$$

Comparer les opérations de la machine avec celles que l'on fait en calculant directement avec les symboles numériques.

3. Imaginer des problèmes semblables de soustraction avec emprunt, mais dans d'autres bases, à partir de nombres de votre choix. Résoudre aussi ces problèmes par écrit.