Plusieurs étudiants du Québec ont participé, le 18 avril 1968, à ce concours organisé par l'Association Mathématique du Québec à l'intention des finissants des collèges classiques. Trois heures étaient allouées et il fallait répondre au maximum à deux questions dans chacune des parties A, B et C.

I

CONCOURS ANNUEL 1969 DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

PARTIE A

1. Si a, b et c sont des nombres réels positifs, montrer que $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$.

2. Soient z, n et k des nombres entiers positifs tels que $z \neq 1$ et $n \leqslant k$. Démontrer que z^n-1 divise $z^{k!}-1$.

3. Trouver la dérivée par rapport à x de

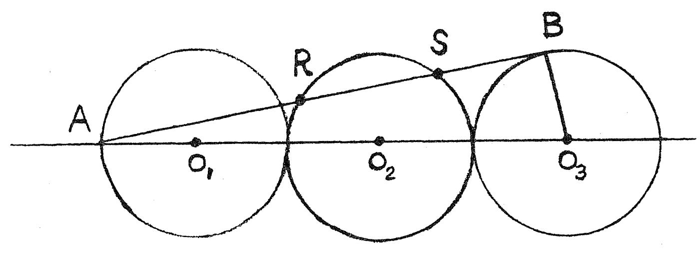
$$y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$$

PARTIE B

4. Démontrer que $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2.$

5. Soit n un nombre entier positif. Trouver toutes les solutions entières positives de l'équation $x^2-y^2=2^n$.

6. Trois cercles tangents 0_1, 0_2 et 0_3, chacun de rayon r, ont leurs centres sur la même droite (voir la figure). La tangente AB au cercle 0_3 coupe le cercle 0_2 en R et en S. Trouver la longueur du segment RS en fonction de r.



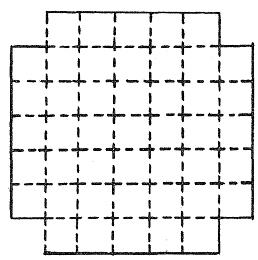
PARTIE C

7. Soient $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ des points du plan tels que la distance de P_{i-1} à P_i soit égale à i unités, pour $i=1, \ldots, n$. Si C est une courbe qui joint P_0 à P_1, P_1 à $P_2, \ldots, P_{n-1}$ à P_n et si la longueur de C excède le nombre n^2, démontrer que C ne peut pas être la ligne brisée $P_0P_1P_2 \ldots P_n$.

8. Quinze personnes entrent successivement dans une salle d'attente, où quinze sièges sont disposés en ligne droite. La première personne s'asseoit sur l'un des quinze sièges disponibles. La seconde s'asseoit à côté de la première (à gauche ou à droite), la troisième s'asseoit à côté de l'une des deux premières, la quatrième à côté de l'une des trois premières et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les personnes soient assises. De combien de façons différentes ces personnes pourraient-elles occuper les sièges ?

9. Démontrer qu'un casse-tête dont toutes les pièces sont de la forme A ne peut pas être réagencé pour donner la forme B. (Les pièces du type A peuvent être placées soit horizontalement soit verticalement.)

A



B

> Les solutions abrégées paraîtront dans le prochain numéro. Le lecteur est invité à nous faire parvenir ses commentaires à propos de ce questionnaire.

ERRATA

Plusieurs lecteurs ont aimablement attiré notre attention sur quelques erreurs qui se sont glissées dans le numéro de novembre du Bulletin. Nous les en remercions et nous nous excusons auprès des auteurs et de nos lecteurs pour ces erreurs bien involontaires. Notre collègue français M. Glayman nous signale qu'à la page 32, dans l'énoncé de la condition O_3, figure un signe de non appartenance après le signe d'implication. Monsieur Gilles Dionne nous fait remarquer également qu'à la page 33, il faut lire $y+t$ et non $z+t$ à la fin du théorème 6, et qu'à la page suivante, à la dixième ligne, devrait apparaître un signe de non appartenance. Sur la seconde page de la couverture, il faut effectuer deux corrections: Mlle Clairette Bourque est de la Régionale de l'Outaouais, tandis que Sr Roberte Legris est de la Commission Scolaire de Hull. Il faut enfin rayer la mention "vice-doyen de la faculté des Sciences" à la page 27; nous nous excusons auprès de M. Abel Gauthier de cette erreur qui s'est glissée malencontreusement.