Plusieurs étudiants du Québec ont participé, le 12 mars dernier, à ce concours organisé à l'intention des finissants du cours secondaire. 80 minutes seulement leur étaient allouées pour répondre aux questions. Voulez-vous tenter votre chance à votre tour?

I

DIX-NEUVIÈME CONCOURS ANNUEL DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE D'AMÉRIQUE (M.A.A.)

QUESTIONNAIRE

1ière PARTIE (3 points par question)

1. Soit P unités l'accroissement de la circonférence d'un cercle qui correspond à un accroissement du diamètre de π unités. P a alors pour valeur:

   (A) $\frac{1}{\pi}$ (B) π (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) π^2 (E) 2π

2. Le nombre réel x tel que le quotient de 64^{x-1} par 4^{x-1} égale 256^{2x} est:

   (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{3}{8}$

3. Si une droite passe par le point (0,4) et si elle est perpendiculaire à la droite $x - 3y - 7 = 0$, alors son équation est:

   (A) $y + 3x - 4 = 0$ (B) $y + 3x + 4 = 0$ (C) $y - 3x - 4 = 0$
   (D) $3y + x - 12 = 0$ (E) $3y - x - 12 = 0$

4. Sur les nombres réels positifs l'opération $*$ est définie par $a * b = \frac{ab}{a+b}$. $4 * (4 * 4)$ est alors égal à:

   (A) $\frac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) 2 (E) $\frac{16}{3}$

5. Si $f(n) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ alors $f(r) - f(r-1)$ est égal à:

   (A) $r(r+1)$ (B) $(r+1)(r+2)$ (C) $\frac{1}{3}r(r+1)$
   (D) $\frac{1}{3}(r+1)(r+2)$ (E) $\frac{1}{3}r(r+1)(2r+1)$

6. Le côté AD d'un quadrilatère convexe ABCD est prolongé au delà du point D de telle sorte qu'il rencontre le côté BC prolongé au delà du point C en E. Soit S la somme des mesures en degrés des angles CDE et DCE. Soit S′ la somme des mesures en degrés des angles BAD et ABC. Si $r = S/S'$, alors:

(A) $r = 1$ dans certains cas et $r > 1$ dans d'autres cas
(B) $r = 1$ dans certains cas et $r < 1$ dans d'autres cas
(C) $0 < r < 1$ (D) $r > 1$ (E) $r = 1$

7. Soit O le point d'intersection des médianes AP et CQ d'un triangle ABC. Si OQ mesure 3 pouces alors la mesure du segment OP en pouces est:

(A) 3 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9 (E) indéterminée

8. Par mégarde un nombre positif est divisé par 6 au lieu d'être multiplié par 6. L'erreur commise au plus proche pour-cent près est:

(A) 100 (B) 97 (C) 83 (D) 17 (E) 3

9. La somme des nombres réels x qui vérifient l'égalité $|x + 2| = 2|x - 2|$ est.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 6 (D) $6\frac{1}{3}$ (E) $6\frac{2}{3}$

10. Dans une école les propositions suivantes sont vraies:
I. Quelques élèves sont malhonnêtes.
II. Tous les membres du cercle littéraire sont honnêtes.
Une conclusion ou déduction nécessairement vraie est:

(A) Quelques élèves de l'école sont membres du cercle littéraire.
(B) Quelques membres du cercle littéraire ne sont pas des élèves de l'école.
(C) Quelques élèves de l'école ne sont pas membres du cercle littéraire.
(D) Aucun membre du cercle littéraire n'est élève de l'école.
(E) Aucun élève de l'école n'est membre du cercle littéraire.

2ième PARTIE (4 points par question)

11. Si un arc de 60° d'un cercle I a même longueur qu'un arc de 45° d'un cercle II, alors le rapport de l'aire du cercle I à l'aire du cercle II est:

(A) 16 : 9 (B) 9 : 16 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(E) aucun des rapports précédents.

12. Un cercle passe par les sommets d'un triangle dont les côtés mesurent $7\frac{1}{2}$, 10 et $12\frac{1}{2}$. Le rayon de ce cercle est:

(A) $\frac{15}{4}$ (B) 5 (C) $\frac{25}{4}$ (D) $\frac{35}{4}$ (E) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

13. Si m et n sont les racines de l'équation $x^2 + mx + n = 0$ et si de plus $m \neq 0, n \neq 0$, alors la somme des racines est:

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) indéterminée.

14. Si x et y sont des nombres différents de zéro tels que $x = 1 + \frac{1}{y}$ et $y = 1 + \frac{1}{x}$, alors y est égal à:

(A) $x - 1$ (B) $1 - x$ (C) $1 + x$ (D) $-x$ (E) x

15. Soit P le produit de trois entiers positifs impairs consécutifs. Le plus grand entier qui divise tous les produits de la forme P est:

(A) 15 (B) 6 (C) 5 (D) 3 (E) 1

16 Si x vérifie les relations $\frac{1}{x} < 2$ et $\frac{1}{x} > -3$ alors:

(A) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2} < x < 3$ (C) $x > \frac{1}{2}$
(D) $x > \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3} < x < 0$ (E) $x > \frac{1}{2}$ ou $x < -\frac{1}{3}$

17. Soit $f(n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ où n est un entier positif. Si $x_k = (-1)^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ alors l'ensemble des valeurs possibles pour f(n) est:

(A) $\{0\}$ (B) $\{\frac{1}{n}\}$ (C) $\{0, -\frac{1}{n}\}$ (D) $\{0, \frac{1}{n}\}$ (E) $\{1, \frac{1}{n}\}$

18. Le côté AB d'un triangle ABC a pour longueur 8 pouces. Une droite DEF est construite parallèlement à AB de telle sorte que D est sur le segment AC, E est sur le segment BC et E est entre D et F. La droite AE prolongée est bissectrice de l'angle FEC. Si DE mesure 5 pouces alors la mesure en pouces de CE est:

(A) $\frac{51}{4}$ (B) 13 (C) $\frac{53}{4}$ (D) $\frac{40}{3}$ (E) $\frac{27}{2}$

19. Soit n le nombre de façons de changer 10 dollars en pièces de 10 cents et de 25 cents de telle sorte qu'il y ait au moins une pièce de 10 cents et au moins une pièce de 25 cents. Que vaut n?

(A) 40 (B) 38 (C) 21 (D) 20 (E) 19

20. Les mesures des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés sont en progression arithmétique. Si la différence commune dans cette progression est de 5° et si le plus grand des angles mesure 160°, alors n est égal à:

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 16 (E) 32

3ième PARTIE (5 points par question)

21. Si on évalue correctement $S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 99!$ alors le chiffre des unités de S est:

(A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 3 (E) 0

22. Un segment de longueur 1 est partagé en quatre segments. Il existe un quadrilatère simple défini avec ces quatre segments pour côtés si et seulement si chaque segment est:

(A) égal à $\frac{1}{4}$ (B) plus grand ou égal à $\frac{1}{8}$ et plus petit que $\frac{1}{2}$
(C) plus grand que $\frac{1}{8}$ et plus petit que $\frac{1}{2}$
(D) plus grand que $\frac{1}{8}$ et plus petit que $\frac{1}{4}$ (E) plus petit que $\frac{1}{2}$

23. Si tous les logarithmes sont réels alors l'égalité
$\log(x + 3) + \log(x - 1) = \log(x^2 - 2x - 3)$ est vérifiée pour:

(A) toutes les valeurs réelles de x (B) aucune valeur réelle de x
(C) toutes les valeurs réelles de x sauf $x = 0$ (D) aucune valeur réelle de x sauf $x = 0$ (E) toutes les valeurs réelles de x sauf $x = 1$.

24. Une peinture de 18" x 24" doit être placée dans un encadrement de bois. Les plus grands côtés de cette peinture doivent être placés verticalement. Les pièces de bois au dessus et au dessous sont deux fois plus larges que les pièces adjacentes aux côtés verticaux. Si la surface du cadre est égale à la surface de la peinture alors le rapport de la plus petite dimension du cadre à la plus grande est:

(A) 1:3 (B) 1:2 (C) 2:3 (D) 3:4 (E) 1:1

25 A court à une vitesse constante et B court x fois aussi vite, $x > 1$.
B donne au départ une avance de y verges à A et au signal donné ils partent dans la même direction. Le nombre de verges parcouru par B pour atteindre A est alors de:

(A) xy (B) $\frac{y}{x + y}$ (C) $\frac{xy}{x - 1}$ (D) $\frac{x + y}{x + 1}$ (E) $\frac{x + y}{x - 1}$

26. Soit $S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2N$ où N est le plus petit entier positif tel que $S > 1{,}000{,}000$. Quelle est la somme des chiffres de N?

(A) 27 (B) 12 (C) 6 (D) 2 (E) 1

27. Si $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}n$, $n = 1, 2, \ldots$, alors $S_{17} + S_{33} + S_{50}$ a pour valeur:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1 (E) -2

28. **Soient a et b deux nombres tels que $a > b > 0$. Si la moyenne arithmétique de a et b est le double de leur moyenne géométrique alors une valeur possible du rapport $\frac{a}{b}$, à l'entier près, est:**

(A) 5 (B) 8 (C) 11 (D) 14 (E) aucun de ces nombres

29. Soient trois nombres x, $y = x^x$, $z = x^{(x^x)}$ où $.9 < x < 1.0$. Ces nombres, placés dans un ordre croissant, sont:

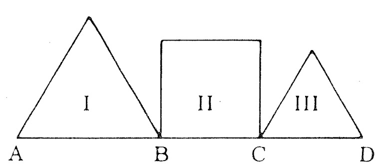
(A) x, z, y (B) x, y, z (C) y, x, z (D) y, z, x
(E) z, x, y

30. Soient P_1 et P_2 deux polygones convexes situés dans un même plan ayant respectivement n_1 et n_2 côtés où $n_1 \leq n_2$. Si P_1 et P_2 n'ont aucun segment de droites en commun alors le nombre maximum de points d'intersection de P_1 et P_2 est:

(A) $2n_1$ (B) $2n_2$ (C) n_1n_2 (D) $n_1 + n_2$ (E) aucun des nombres précédents

4ième PARTIE (6 points par question)

31. Dans le dessin ci-contre, non tracé à l'échelle, les figures I et III représentent des triangles équilatéraux dont les aires respectives sont de $32\sqrt{3}$ et $8\sqrt{3}$ pouces carrés. L'aire du carré de la figure II est de 32 pouces carrés. La longueur du segment AD est diminuée de $12\frac{1}{2}\%$ tout en maintenant fixe les longueurs des segments AB et CD. Quelle est en pour-cent la diminution de l'aire du carré?



(A) $12\frac{1}{2}$ (B) 25 (C) 50 (D) 75 (E) $87\frac{1}{2}$

32. Les points A et B se déplacent avec des vitesses uniformes sur deux droites qui se rencontrent à angle droit en un point O. Quand A est au point O, B a encore 500 verges à parcourir pour arriver en O. 2 minutes plus tard, les points A et B sont équidistants de O et après 8 minutes supplémentaires ils sont encore équidistants de O. Le rapport de la vitesse de A à celle de B est alors de:

(A) 4:5 (B) 5:6 (C) 2:3 (D) 5:8 (E) 1:2

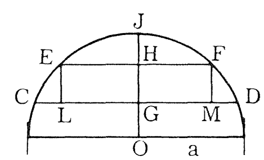
33. Un nombre N a trois chiffres quand il est exprimé dans la base 7. Quand on exprime N dans la base 9, on retrouve les mêmes chiffres mais l'ordination est inversée. Le chiffre du milieu est:

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 5

34. Les 400 membres votants d'une chambre des communes ont rejeté un bill. A un nouveau tour de scrutin, avec les mêmes votants, le bill fut adopté avec une marge double de celle avec laquelle il fut rejeté lors du premier vote. Le nombre des députés qui ont voté pour le bill au second tour fut les $\frac{12}{11}$ du nombre de ceux qui ont voté contre au premier tour. De combien le nombre de ceux qui ont voté pour le bill au second tour excède-t-il le nombre de ceux qui ont voté pour au premier tour?

(A) 75 (B) 60 (C) 50 (D) 45 (E) 20

35. Dans la figure ci-contre, le centre du cercle est O, le rayon mesure a pouces, la corde EF est parallèle à la corde CD, les points O,G,H,J sont colinéaires et G est le point milieu de CD. Soit K l'aire en pouces carrés de l'intérieur du trapèze CDFE et soit R l'aire en pouces carrés du rectangle ELMF. Si les cordes CD et EF sont déplacées parallèlement vers le haut de telle sorte que OG augmente et se rapproche de la valeur a tandis que JH est constamment égal à HG, alors le rapport K:R devient arbitrairement près de:



(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

Les solutions seront publiées dans le prochain numéro du Bulletin. Les lecteurs sont invités à nous envoyer leurs commentaires sur ce questionnaire.