*"L'ordre est le plaisir de la raison..."*
(Paul Claudel, *Le soulier de satin*)

**A**

# LES ANNEAUX ORDONNÉS

## Premières notions

par Julien CONSTANTIN,
directeur du département de mathématique,
Université de Sherbrooke

## INTRODUCTION

L'objet de cette réflexion est la notion d'ordre, notion qui se traduit dans le langage courant par diverses expressions telles que: "plus grand que", "plus nombreux que", "précède", "obéit à", "est prérequis à", etc. Ainsi, on peut ordonner un ensemble d'individus de différentes façons, et X peut précéder Y quant à la taille et lui céder quant au poids. De même, en mathématiques, la notion d'ordre est *toute relative,* et il y a, par exemple, plusieurs façons d'ordonner les entiers. En voici deux:

A) $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

B) $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots$

Si l'on convient d'écrire $x \succ y$ lorsque $x$ précède $y$ dans la liste, alors, dans l'ordre A, on a $-3 \succ 2$, et dans l'ordre B, $2 \succ -3$. Ces "mises en ordre" des entiers ne sont pas toutes également importantes, et il est vraisemblable que l'ordre A est plus utilisé que l'ordre B.

Dans ce qui suit, nous n'étudierons pas la notion d'ordre dans ce cadre le plus général qui permettrait de retrouver tous les exemples du paragraphe précédent, mais nous nous limiterons à un cadre mathématique très précis et très important, celui des *anneaux* (1). Les résultats que nous obtiendrons s'appliqueront par conséquent aux anneaux $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ et à beaucoup d'autres.

Inspirons-nous d'abord de l'exemple des entiers. Il y a des entiers que l'on appelle positifs, c'est-à-dire "supérieurs ou égaux à zéro". Ils forment un ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ et on constate que $7 \geqslant 4$ en étudiant la différence $7 - 4 = 3$ et en voyant que cette différence est un élément de $\mathbb{N}$ ; de même, puisque $7 - 12 \notin \mathbb{N}$, on sait que $7 \ngeqslant 12$ . D'une manière générale, on dit que

$$x \geqslant y \quad \text{si} \quad x - y \in \mathbb{N}.$$

Cela nous servira de modèle.

## ORDRE et ADDITION

Soit $A$ un anneau dont les opérations seront désignées par les notations additives et multiplicatives habituelles. Dans *tout* ce qui suit, $0$ dénotera le neutre de cet anneau pour l'addition, et $x, y, z, t$ désigneront des éléments *quelconques* de $A$ . Soit $P$ une partie de $A$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$0_1$. $0 \in P$ ;

$0_2$. $(x \neq 0 \text{ et } x \in P) \Rightarrow -x \notin P$ ;

$0_3$. $(x \in P \text{ et } y \in P) \Rightarrow x + y \in P$ .

$x$ et $y$ étant des éléments quelconques de $A$ , posons comme définition fondamentale:

$$(*) \quad x \succcurlyeq y \quad \textit{si et seulement si} \quad x - y \in P .$$

Nous allons établir quelques propriétés de le relation $\succcurlyeq$ en nous servant des axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$ et du fait que $A$ est un anneau.

---

(1) Rappelons qu'un anneau $A$ est un ensemble muni de deux opérations internes, notées ici $+$ et $\cdot$ telles que

a) $+$ et $\cdot$ sont associatives;

b) il y a un neutre pour $+$, noté ici 0, i.e. $x + 0 = 0 + x = x$ , pour tout $x \in A$ ;

c) pour tout $x \in A$ , il existe un élément de $A$ , noté $-x$ , tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ;

d) $+$ est commutative;

e) pour tous $x, y, z \in A$ , on a $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ et $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ .

*THÉORÈME 1.* $x \in P \Longleftrightarrow x \geqslant 0$ .

En effet, $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 0 \in P \Leftrightarrow x \in P$ , en vertu de (*) et du fait que $0$ est le neutre pour l'addition. Ainsi $P$ est précisément l'ensemble des éléments $x \in A$ tels que $x \geqslant 0$ .

*THÉORÈME 2.* Quel que soit $x \in A$ , $x \geqslant x$ (réflexivité de l'ordre).

D'après $0_1$, on a $0 \in P$ ; ainsi $x - x \in P$ et donc, en vertu de la définition fondamentale, $x \geqslant x$ .

*THÉORÈME 3.* $(x \geqslant y$ et $y \geqslant x) \Longrightarrow x = y$ (antisymétrie de l'ordre).

En effet, supposons $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$ . Alors, d'après (*), $x - y \in P$. *Si* $x \neq y$ , on a $x - y \neq 0$ et $x - y \in P$ . D'après $0_2$, $-(x - y) \notin P$ , d'où $y - x \notin P$ et $y \not\geqslant x$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc $x = y$ .

*THÉORÈME 4.* $(x \geqslant y$ et $y \geqslant z) \Rightarrow x \geqslant z$ (transitivité de l'ordre).

Car si $x \geqslant y$ et $y \geqslant z$ , alors $x - y \in P$ et $y - z \in P$ , en vertu de (*). Mais $0_3$ nous permet alors de dire que $(x - y) + (y - z) \in P$ , puisqu'il s'agit de la somme de deux éléments de $P$ . Ainsi $x - z \in P$ et $x \geqslant z$ .

*THÉORÈME 5.* $x \geqslant y \Longrightarrow x + z \geqslant y + z$ .

Supposons $x \geqslant y$ ; alors $x - y \in P$ ; d'où $x + (z - z) - y \in P$ ; donc $(x + z) - (y + z) \in P$ et par suite $x + z \geqslant y + z$ .

*THÉORÈME 6.* $(x \geqslant y$ et $z \geqslant t) \Longrightarrow x + z \geqslant y + t$ .

Soit $x \geqslant y$ et $z \geqslant t$ ; alors $x - y \in P$ et $z - t \in P$ , en vertu de (*). Donc $(x - y) + (z - t) \in P$ , d'après $0_3$. Par conséquent, $(x + z) - (y + t) \in P$ et donc $x + z \geqslant z + t$ .

*THÉORÈME 7.* $x \geqslant y \Longrightarrow -y \geqslant -x$ .

En effet, si $x \geqslant y$ , alors $x - y \in P$ , c'est-à-dire $-y -(-x) \in P$ , et donc $-y \geqslant -x$ , en vertu de (*).

Ainsi qu'on le voit par les théorèmes 5, 6 et 7, les axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$ suffisent pour assurer un lien harmonieux entre l'ordre et l'addition, et nous fournir un grand nombre des propriétés usuelles de $\geqslant$ .

## UNE BROCHETTE D'EXEMPLES

*EXEMPLE 1.* Prenons $A = \mathbb{Z}$ et $P = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. On a $x \succcurlyeq y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{N}$ . Par exemple, $7 \succcurlyeq -4$ car $7 - (-4) = 11 \in \mathbb{N}$ . On obtient l'ordre ordinaire des entiers, celui que l'on dénote habituellement par $\geqslant$ .

*EXEMPLE 2.* Prenons $A = \mathbb{Z}$ , mais, cette fois, $P = \{0, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$.

On a $13 \succcurlyeq 6$ car $13 - 6 = 7 \in P$ , mais $13 \not\succcurlyeq 9$ car $13 - 9 \in P$ . On constate aisément que $P$ satisfait aux axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$, et que, par conséquent, les théorèmes 1 à 7 sont vrais pour l'ordre donné par $P$ .

Néanmoins, cet ordre peut paraître bizarre, mais n'est-ce pas justement celui qu'adopteraient deux joueurs convenant que le gagnant sera celui des deux qui gagnera au moins cinq parties de plus que l'autre ? Un ordre "semblable" préside à l'établissement de certains records internationaux où, d'après les règlements, on ne considère un nouveau record que s'il l'emporte sur le précédent avec une certaine marge.

*EXEMPLE 3.* Prenons $A = \mathbb{Z}$ et $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ .

De nouveau, les axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$ sont satisfaits. On a ici $3 \succcurlyeq 1$ et $3 \not\succcurlyeq 2$ .

*EXEMPLE 4.* Prenons $A = \mathbb{Q}$ , l'ensemble des nombres rationnels, et soit $P$ l'ensemble de tous les rationnels $x$ qui peuvent se mettre sous la forme $p/q$ , où $p \in \mathbb{N}$ , $q \in \mathbb{N}$ , $q \neq 0$ . Les axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$ sont vérifiés, et on obtient un ordre qui est l'*ordre naturel* des nombre rationnels. Cet ordre est habituellement noté $\geqslant$ .

*EXEMPLE 5.* Prenons $A = \mathbb{Q}$ et $P$ l'ensemble formé de $0$ et de tous les rationnels $x \geqslant 1/2$ au sens de l'ordre naturel (exemple 4). Encore une fois, $0_1$, $0_2$ et $0_3$ sont vérifiés et les théorèmes 1 à 7 s'appliquent. On a ici $1/2 \succcurlyeq 0$ , $3/4 \succcurlyeq 1/8$ mais $3/4 \not\succcurlyeq 1/2$ et $1/4 \not\succcurlyeq 0$.

*EXEMPLE 6.* $A = \mathbb{Z}$ et $P = \{0, -1, -2, -3, -4, ...\}$ .

Les axiomes sont satisfaits. On a $5 \succcurlyeq 7$ et $-1 \succcurlyeq 3$ . Cet ordre est habituellement noté $\leqslant$.

C'est à dessein que nous avons pris tous les exemples précédents dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ . Rien ne nous oblige à nous limiter à ces deux anneaux et on peut inventer une foule d'autres exemples. En voici deux.

*EXEMPLE 7.* Soit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$. Munissons $A$ des opérations suivantes:

$$(x,y) + (z,t) = (x + z, y + t)$$

$$(x,y)\ (z,t) = (xz\ ,\ xt)$$

où $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ . On vérifiera aisément qu'avec ces deux opérations $A$ est un anneau non commutatif. Prenons $P = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\ , x \in \mathbb{N} \text{ et } (x = 0 \Longrightarrow y \in \mathbb{N})\}$ . On voit très facilement que $P$ satisfait à $0_1$, $0_2$ et $0_3$.

*EXEMPLE 8.* Soit $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, un sous-anneau de $\mathbb{R}$ . Posons $P = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x = 0 \Longrightarrow y \in \mathbb{N})\}$.

Les axiomes $0_1$, $0_2$ et $0_3$ sont satisfaits. Cependant l'ordre fourni par $P$ diffère de l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ . En effet, $3 - 8\sqrt{2} \geqslant 2 + 11\sqrt{2}$ car $(3 - 8\sqrt{2}) - (2 + 11\sqrt{2}) = 1 - 19\sqrt{2} \in P$ .

## ET LA MULTIPLICATION ?

On n'a pas encore démontré la proposition suivante : $(x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Longrightarrow xy \geqslant 0$ . Cette proposition peut s'écrire

$$(**) \qquad x \in P \text{ et } y \in P \Longrightarrow xy \in P$$

Est-il possible de la démontrer à partir de $0_1$, $0_2$ et $0_3$ ? L'examen des exemples précédents nous renseignera.

- On constatera aisément que dans les exemples 1, 2, 3, 4 et 7 le produit de deux éléments de $P$ est un élément de $P$ . Ainsi la proposition (**) n'est pas incompatible avec $0_1$, $0_2$, $0_3$, puisqu'il se trouve des cas où ces quatre propositions sont vérifiées.
- Dans les exemples 5, 6 et 8, le produit de deux éléments de $P$ n'est pas toujours un élément de $P$ . Ainsi, dans l'exemple 5, $\frac{1}{2} \in P$ mais $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \notin P$ . La proposition (**) n'est donc pas une conséquence logique de $0_1$, $0_2$ et $0_3$, puisqu'il se trouve des cas où l'on a $0_1$, $0_2$ et $0_3$ sans avoir (**).

En somme, il est *inutile* de tenter de démontrer (**) en se servant de $0_1$, $0_2$ et $0_3$. D'autre part, (**) n'est pas incompatible avec ces trois propositions. Nous allons donc l'adopter comme nouvel axiome et obtenir une théorie plus complète.

## ORDRE, ADDITION et MULTIPLICATION

Soit $A$ un anneau et $P$ une partie de $A$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$0_1$. $0 \in P$ ;
$0_2$. $(x \neq 0 \text{ et } x \in P) \Longrightarrow -x \notin P$ ;
$0_3$. $(x \in P \text{ et } y \in P) \Longrightarrow x + y \in P$ ;
$0_4$. $(x \in P \text{ et } y \in P) \Longrightarrow xy \in P$ .

Si $x$ et $y$ sont des éléments quelconques de $A$ ,
posons $x \geqslant y$ si et seulement si $x - y \in P$ .

Il est clair que les théorèmes 1 à 7 de la section I sont vrais encore maintenant.

*THÉORÈME 8.* $(x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Longrightarrow xy \geqslant 0$ .

C'est précisément l'axiome $0_4$, récrit à la lumière du théorème 1 .

*THÉORÈME 9.* $(x \geqslant y \text{ et } z \geqslant 0) \Longrightarrow xz \geqslant yz$ .

Supposons $x \geqslant y$ et $z \geqslant 0$ ; alors $x - y \in P$ et $z \in P$ . D'où, en vertu de $0_4$, $(x - y) z \in P$ . Ainsi $xz - yz \in P$ et donc $xz \geqslant yz$ .

*THÉORÈME 10.* $(x \geqslant y \text{ et } 0 \geqslant z) \Longrightarrow yz \geqslant xz$ .

Car si $x \geqslant y$ et $0 \geqslant z$ , alors $x - y \in P$ et $-z \in P$ . Donc $(x - y)(-z) \in P$ , d'où $yz - xz \in P$ et $yz \geqslant xz$ .

*THÉORÈME 11.* Si $x \geqslant 0$ ou si $0 \geqslant x$ , alors $x^2 \geqslant 0$ .

Si $x \geqslant 0$ , alors $x \in P$ et $x^2 = x \cdot x \in P$ , d'après $0_4$. Si $0 \geqslant x$ alors $-x \in P$ et $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in P$ , toujours d'après $0_4$.

Nous venons de montrer que "beaucoup" de carrés sont $\geqslant 0$ . On peut se demander si *tous* les carrés sont $\geqslant 0$ . La réponse est oui dans le cas des exemples 1, 4 et 7. Elle est non dans le cas des exemples 2 et 3. Ainsi dans l'exemple 2, $2^2 = 4 \ngeqslant 0$ . Le fait que tous les carrés soient $\geqslant 0$ n'est donc pas incompatible avec $0_1$, $0_2$, $0_3$ et $0_4$ mais n'en est pas, non plus, une conséquence logique. Nous sommes dans une situation analogue à celle de la section III: nous allons ajouter un nouvel axiome à notre système, inspiré de l'énoncé du théorème 11. Ce nouvel axiome excluera les situations comme celles de l'exemple 2, où $1 \ngeqslant 0$ et $0 \ngeqslant 1$ (i.e. 1 n'est ni "supérieur", ni "inférieur", ni égal à 0).

## QUAND LES CARRÉS SONT POSITIFS !

Soit $A$ un anneau et $P$ une partie de $A$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$0_1$. $0 \in P$ ;
$0_2$. $(x \neq 0$ et $x \in P) \Longrightarrow -x \not\in P$ ;
$0_3$. $(x \in P$ et $y \in P) \Longrightarrow x + y \in P$ ;
$0_4$. $(x \in P$ et $y \in P) \Longrightarrow xy \in P$ ;
$0_5$. Quel que soit $x \in A$ , on a $x \in P$ ou $-x \in P$ .

*Note:* Ne pas confondre $0_2$ et $0_5$. P, dans l'exemple 2, satisfait à $0_2$, mais non pas à $0_5$.

Il est clair que, dans les conditions qui précèdent, les théorèmes 1 à 11 sont toujours vrais.

*THÉORÈME 12.* Quels que soient $x, y \in A$ , on a $x \geqslant y$ ou $y \geqslant x$ (totalité de l'ordre).

En effet, considérons $x - y \in A$ . D'après $0_5$, $x - y \in P$ ou $-(x - y) \in P$ . Dans le premier cas $x \geqslant y$ , et dans le second cas $y \geqslant x$ .

*THÉORÈME 13.* Si $x \in A$ , alors $x^2 \geqslant 0$ .

Car, si $x \in A$ , on a $x \geqslant 0$ ou $0 \geqslant x$ , d'après le théorème précédent. Par conséquent $x^2 \geqslant 0$ , selon le théorème 11.

*THÉORÈME 14.* Si $A$ possède un élément neutre 1, alors $1 \geqslant 0$ .

En effet, $1 = 1 \cdot 1$ est un carré.

*THÉORÈME 15.* Si $x \geqslant 0$ et si $x$ est inversible, alors $x^{-1} \geqslant 0$ .

D'après le théorème 12, $x^{-1} \geqslant 0$ ou $0 \geqslant x^{-1}$ .
*Si* $0 \geqslant x^{-1}$ , alors $-x^{-1} \geqslant 0$ et, comme $x \geqslant 0$ , alors $(-x^{-1})\, x \geqslant 0$ d'après le théorème 8. Mais $(-x^{-1})\, x = -1$ . Ainsi $-1 \geqslant 0$ , ce qui est impossible d'après les théorèmes 14 et 3 . Donc $x^{-1} \geqslant 0$ .

Si $x$ et $y$ sont inversibles et si $x \geqslant y \geqslant 0$ , alors $y^{-1} \geqslant x^{-1}$ .

On obtiendra le résultat aisément en utilisant les théorèmes 15 et 9.

On verra dans la dernière section que plusieurs autres résultats intéressants peuvent être tirés des axiomes $0_1, 0_2, \dots, 0_5$. Remarquons néanmoins que l'axiome $0_5$, bien que vérifié dans plusieurs cas très importants, est extrêmement restrictif. C'est pourquoi, dans des théories plus fines, on le remplace par des axiomes beaucoup moins forts mais dont le sens général est à peu près le suivant: $P$ est une partie "assez grande" de $A$. Autrement $P$ pourrait être un ensemble très "petit"; ainsi $P = \{0\}$ satisfait à $0_1$, $0_2$, $0_3$ et $0_4$, et alors la relation $\geqslant$ est tout simplement $=$ .

## POUR UNE SOIRÉE D'HIVER...

EXERCICE 1. Considérons l'inéquation $x + 5 \geqslant 4$ . La résoudre dans le cas de l'ordre donné dans l'exemple 1. Faire la même chose dans le cas de l'ordre de l'exemple 2, et de même pour celui de l'exemple 3. Pour chacun de ces trois ordres, trouver $[1,9] = \{x \mid 9 \geqslant x \geqslant 1\}$ .

EXERCICE 2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on ne peut trouver de partie $P$ telle que les axiomes $0_1$, $0_2$, $0_3$, $0_4$ et $0_5$ soient satisfaits.

EXERCICE 3. Est-ce que la proposition $x + x \in P \Longrightarrow x \in P$ est toujours vérifiée dans les exemples 1 à 8 ? Montrer que cette proposition est vérifiée lorsque $0_2$ et $0_5$ le sont.

EXERCICE 4. Soit un anneau $A$ avec une partie $P$ satisfaisant à $0_1$, $0_2$, ..., $0_5$. Montrer, par l'étude de l'exemple 7, qu'on n'a pas, en général, les propriétés suivantes:

$$(xy \geqslant 0 \,,\, x \geqslant 0 \,,\, x \neq 0) \Longrightarrow y \geqslant 0 \,;$$

$$(x \geqslant 0 \,,\, y \geqslant 0 \,,\, x^2 \geqslant y^2) \Longrightarrow x \geqslant y \,.$$

Démontrer que l'on a:

$$(xy \geqslant 0 \,,\, xy \neq 0 \,,\, x \geqslant 0) \Longrightarrow y \geqslant 0 \,.$$

EXERCICE 5. Soit $A$ un anneau et $P$ une partie de $A$ satisfaisant à $0_1$, $0_2$, $0_3$, $0_4$ et $0_5$. Si $x \in P$ , posons $|x| = x$ ; si $x \notin P$ , posons $|x| = -x$ . Démontrer alors toutes les propriétés usuelles des "valeurs absolues", par exemple, $|x| = |-x|$ , $|xy| = |x|\,|y|$ , $|x|^2 = x^2$ , $|x| \geqslant x$ , $y \geqslant |x| \Longleftrightarrow y \geqslant x \geqslant -y$ , $|x| + |y| \geqslant |x + y|$ .

EXERCICE 6. Soit $A$ un anneau avec une partie $P$ satisfaisant à $0_1$, $0_2$, $0_3$ et $0_5$. Soit $P^+ = P \backslash \{0\}$. Supposons que $P^+$ satisfait à $0'_4$: $(x \in P^+$ et $y \in P^+) \Longrightarrow xy \in P^+$ . Posons $x > y$ si et seulement si $x - y \in P^+$ .

a) Trouver, comme on a fait pour $\geqslant$ , des propriétés de $>$ .

b) Montrer que $A$ est intègre [i.e. $xy = 0 \Longrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)]$ .

c) Montrer que $(xy \succcurlyeq 0 \;,\; x \succcurlyeq 0 \;,\; x \neq 0) \Longrightarrow y \succcurlyeq 0$ .

d) Montrer que $(x \succcurlyeq 0 \;,\; y \succcurlyeq 0 \;,\; x^2 \succcurlyeq y^2) \Longrightarrow x \succcurlyeq y$ .

## CONCLUSION

Nous espérons avoir quelque peu montré, tout en nous limitant à un cadre restreint, celui des anneaux les plus élémentaires, ou même simplement des sous-anneaux de $\mathbb{R}$ , que la notion d'ordre, plus riche et variée qu'on ne le croît parfois, dépend dans une bonne mesure d'un choix arbitraire et qu'elle peut faire l'objet d'un traitement axiomatique aussi aisé que celui des opérations, avec lesquelles ses liens doivent être clairement montrés.

Bien que la notion d'ordre soit l'une des plus fondamentales et des plus utiles, elle est souvent assez négligée dans l'enseignement au profit de ce qui n'en est qu'un cas particulier, l'égalité. Il est bon de se rappeler, pourtant, que, ces dernières années, plusieurs théorèmes importants ont reçu d'élégantes démonstrations ou généralisations grâce à des relations d'ordre judicieusement choisies: démonstration par Bishop et de Leeuw d'un important théorème de Choquet, démonstration par Ward d'un théorème fondamental sur l'existence de certains points d'un continu, etc.