Le Coin du problème

Rédacteur: Gabriel Garneau, Ecole Polytechnique, Montréal

CONCOURS DE PROBLÈMES

Les problèmes qui suivent font l'objet d'un concours auquel nous invitons tous nos lecteurs à participer. Les solutions reçues et jugées les plus intéressantes par leur originalité mériteront à leurs auteurs des prix sous forme de publications mathématiques. Faire parvenir vos solutions à Gabriel Garneau, département de mathématique, Ecole Polytechnique, 2500 avenue Marie-Guyard, Montréal 250, Québec.

PROBLÈME 1 *(proposé par M. Claude Lapointe, Montréal)*

On veut planter dix arbres. Comment doit-on procéder si l'on désire que ces dix arbres forment dix rangées de trois arbres par rangée ?

PROBLÈME 2

Si le produit de *673,106* par *4,783,205,468* est *3,219,60*,299,743,608,* trouvez le chiffre manquant (remplacé par *) sans effectuer la multiplication.

PROBLÈME 3

Remplacez les x par les chiffres appropriés, sachant que le quotient de la première division est égal au dividende de la deuxième.

(1)
$$\begin{array}{l|l} \text{x x x x x x x x x} & \text{x x x} \\ \cline{2-2} \underline{\text{x x x}} & \text{x x x x x x} \\ \quad \text{x x x x} & \\ \quad \underline{\text{x x x}} & \\ \qquad \text{x x x} & \\ \qquad \underline{\text{x x x}} & \\ \qquad \text{x x x x} & \\ \qquad \underline{\text{x x x x}} & \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l|l} \text{x x x x x x} & \text{x x} \\ \cline{2-2} \underline{\text{x x}} & \text{x x x x x} \\ \;\text{x x x} & \\ \quad \underline{\text{x x}} & \\ \quad \text{x x x} & \\ \quad \underline{\text{x x x}} & \\ \qquad \text{x x x} & \\ \qquad \underline{\text{x x x}} & \end{array}$$

PROBLÈME 4

Quatre jetons sont lancés simultanément, trois fois de suite. Les jetons portent respectivement au recto et au verso les nombres suivants: 1 et 0 sur le premier; 2 et 0 sur le deuxième; 4 et 0 sur le troisième; 8 et 0 sur le quatrième. Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus aux trois lancers soit comprise entre 20 et 40 (20 et 40 compris) ?

SOLUTIONS

Nous reproduisons ici les solutions des trois premiers problèmes proposés dans le Bulletin, numéro 4, 9e année. Nous remercions tous ceux qui ont fait parvenir leurs solutions à ces problèmes et nous les invitons à renouveler ce geste.

PROBLÈME 1

On considère n^2 personnes disposées en carré. On choisit dans chaque rangée la plus petite personne et dans chaque colonne la plus grande. On obtient ainsi un ensemble de *petites* personnes et un ensemble de *grandes* personnes. On choisit ensuite dans ces deux dernirs ensembles la plus grande des *petites* personnes et la plus petite des *grandes personnes.* Que peut-on affirmer quant à la grandeur relative de ces individus ?

Solution

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \boxed{a_{i_1j_1}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boxed{a_{i_0j_0}} & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Soit $a_{i_0j_0}$ la plus grande des *petites* personnes et $a_{i_1j_1}$ la plus petite des *grandes* personnes. On a $a_{i_1j_1} \geqslant a_{ij_1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et ainsi $a_{i_1j_1} \geqslant a_{i_0j_1}$. Mais $a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, d'où $a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j_1}$ et $a_{i_1j_1} \geqslant a_{i_0j_0}$. Donc la plus petite des *grandes* personnes est plus grande ou de taille égale à la plus grande des *petites* personnes.

PROBLÈME 2

Dans un village, il commence à neiger à un taux constant durant l'avant-midi. Une "souffleuse" commence à déblayer une route de deux milles de longueur à midi. Elle enlève la neige à un taux constant. Sachant qu'à 1 h. p.m. la souffleuse a déjà parcouru le premier mille et qu'elle a complété le second mille à 3 h. p.m., on demande à quelle heure la neige a commencé à tomber.

Solution (proposée par Jacques Bordier, Collège Brébeuf, Montréal)

Soient $Q(t)$ la quantité de neige présente au temps t, $T(t)$ la quantité de neige déjà tombée au temps t et $E(t)$ la quantité de neige déjà enlevée au temps t. Le temps est mesuré en heures.

Les données du problème se traduisent comme suit:

(1) $\frac{dT}{dt} = k$ (constante positive) (2) $\frac{dE}{dt} = m$ (constante positive)

(3) $\int_0^1 v(t)\ dt = \int_1^3 v(t)\ dt$, où $v(t) = \frac{dS}{dt}$ est la vitesse de la charrue au temps t.

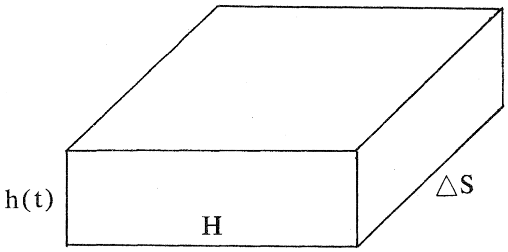
De (1) on obtient: $T(t) = kt + C$ et $C = Q(0)$, d'où

$$\boxed{T(t) = kt + Q(0)}.$$

On voit que si $t = \frac{-Q(0)}{k}$, on a $T(t) = 0$, c'est-à-dire que la neige commence à tomber.

Il reste à évaluer la constante k.

La relation (2) donne: $\frac{dE}{dt} = m$, d'où $dE = m\ dt$ = quantité de neige amassée dans l'intervalle $[t, t + dt]$. La fonction E étant linéaire, dE donne la quantité exacte.



H : largeur de la route
h(t) : épaisseur de la neige présente au temps t
$\triangle S$: distance parcourue (en milles) par la charrue dans l'intervalle $[t, t+\triangle t]$.

Le produit $\triangle S \times h(t) \times H$ donne une approximation de la quantité de neige tombée dans l'intervalle $[t,t+dt]$. Donc $m\, dt \approx S \times h(t) \times H$, d'où

$$\frac{\triangle S}{dt} \approx \frac{m}{h(t) \times H} \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{m}{h(t) \times H} .$$

Exprimons $h(t)$ en fonction de $T(t)$: $T(t) = 2H\, h(t)$, d'où $h(t) = T(t)/2H$. Donc $v(t) = dS/dt = 2mH/T(t) = \big(2mH\big)/\big(kt+Q(0)\big)$. La condition (3) s'exprime maintenant:

$$\int_0^1 \frac{2mH}{kt+Q(0)}\,dt = \int_1^3 \frac{2mH}{kt+Q(0)}\,dt \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \frac{dt}{kt+Q(0)} = \int_1^3 \frac{dt}{kt+Q(0)} ,$$

d'où $\ln \big(kt+Q(0)\big)\big]_0^1 = \ln \big(kt+Q(0)\big)\big]_1^3$, $\big(k+Q(0)\big)^2 = 3kQ(0) + \big(Q(0)\big)^2$ et $\boxed{k=Q(0)}$. Par suite, $t= -Q(0)/Q(0) = -1$. Il a donc commencé à neiger à 11 heures a.m.

PROBLÈME 3

Soient 27 corps dont les poids sont respectivement $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 26^2, 27^2$. Groupez ces corps en trois ensembles qui aient la même pesanteur.

Solution (proposée par Guy-Paul Sanscartier, Victoriaville)

Nous savons que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$. En particulier, si $n=27$, $\sum_{i=1}^{27} i^2 = 6930$. Donc chaque ensemble demandé doit avoir une pesanteur égale à 2310; si nous pouvons trouver deux de ces ensembles, le problème sera résolu.

(1) Un entier n étant donné, il est toujours possible de trouver des entiers p et q, tels que la somme des carrés de n entiers consécutifs à partir de p soit égale à la somme des carrés de $n+1$ entiers consécutifs à partir de q. Il suffit, en effet, de vérifier l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \big[n(2n+1)+k\big]^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \big[n(2n+1)+(n+1)+k\big]^2 \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Ainsi, pour $n=1$, no a $5^2=3^2+4^2$; pour $n=2$, on a $13^2+14^2=10^2+11^2+12^2$; pour $n=3$, on a $25^2+26^2+27^2=21^2+22^2+23^2+24^2=2030$; etc.

Donc il nous reste à trouver deux sommes de carrés égales à 280, puisque $280 = 2310 - 2030$.

(2) Etant donné un entier quelconque m, nous pouvons établir la relation suivante: $m^2+(2m)^2+[m+(m+2m)]^2+[2m+(2m+(m+2m))]^2 = (m+2m)^2+[2m+(m+2m)]^2+[2m+(m+(m+2m))]^2 = 70m^2$. Or si $m=2$, on a justement $70m^2=280$. On a donc trouvé que $280=2^2+4^2+8^2+14^2=6^2+10^2+12^2$. Les trois ensembles cherchés peuvent être par conséquent:

(i) 2^2, 4^2, 8^2, 14^2, 21^2, 22^2, 23^2, 24^2

(ii) 6^2, 10^2, 12^2, 25^2, 26^2, 27^2

(iii) 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2, 19^2, 20^2.