SOLUTION DES PROBLÈMES DU BULLETIN NUMÉRO 3

par Gabriel Garneau,
rédacteur en chef

1. Chaque nombre est formé de 6 chiffres. Soit N le plus petit des nombres, les autres sont 2N, 3N, ..., 6N. Comme chacun d'eux est multiple du 1er, celui-ci est $< \frac{1000000}{6} < 166667$. Il doit donc commencer par 1. Tous les autres étant multiples du premier, le premier chiffre de chacun sera différent du premier chiffre de chacun des autres. Les 6 nombres étant formés des mêmes chiffres, ils seront donc composés de 6 chiffres différents. Un de ces chiffres est 1 et 0 ne figure pas parmi eux. Si l'on considère le dernier chiffre de N, on remarque qu'il ne peut être 5, car alors 2N se terminerait par 0; de plus il ne peut être pair, car alors 5N se terminerait par 0. Il est donc impair et différent de 5. Donc N, 3N et 5N se terminent par 3 chiffres impairs différents; de même, 2N, 4N et 6N se terminent aussi par 3 chiffres différents. Tous les nombres se terminent donc par un chiffre différent . Ceci implique que N renferme 3 chiffres pairs et trois chiffres impairs. En plus de renfermer 1, N renferme également 5 puisque N est impair et par conséquent 5N se termine par 5. Donc le dernier chiffre de N est soit 3, 7 ou 9. Le dernier chiffre de 3N ne peut être 3, 7 ou 9 (puisque tous les derniers chiffres sont différents); il ne peut non plus être 5 car alors 6N se terminerait par 0. Par conséquent le dernier chiffre de 3N est 1, d'où le dernier chiffre de N est 7.

   On en déduit que les derniers chiffres de N, 2N, 3N, 4N, 5N et 6N sont respectivement 7, 4, 1, 8, 5, 2. En particulier N ne contient ni 0 ni 9. De cette dernière constatation, nous allons montrer que deux chiffres du même ordre de deux de ces nombres ne peuvent être le même. En effet la soustraction de deux des nombres donne N, 2N, 3N, 4N ou 5N, or si deux chiffres du même ordre étaient égaux, le chiffre de cet ordre dans la différence serait 0 ou 9, ce qui est impossible. Maintenant si on fait la somme des 6 nombres on obtient puisque 7 + 4 + 1 + 8 + 5 + 2 = 27

$$\begin{array}{r l}
N= & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
2N= & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
3N= & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
4N= & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
5N= & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
\underline{6N=} & x\ x\ x\ x\ x\ x \\
\overline{21N}= & 27\ (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) \\
\text{d'où } N= & 142857
\end{array}$$

(solution proposée par M. Gaston Bertrand)

2. Le nombre de dizaines du nombre représentant le montant de la vente est impair. Or le montant de la vente est un carré parfait.

   On vérifie aisément que les seuls carrés parfaits possédant un nombre impair de dizaines sont ceux qui se terminent par un 6.

   Donc à la fin du partage de la recette de la vente, l'aîné a 4 dollars de plus que son frère.

   .e couteau coûte donc 2 dollars.

3. Pour avoir des racines rationnelles il faut que b^2-4ac soit un carré parfait. Or, a, b et c étant des nombres impairs, posons

$$a = 2r + 1$$
$$b = 2s + 1$$
$$c = 2t + 1$$

où r, s et t sont des entiers

$$b^2 - 4ac = (2s + 1)^2 - 4(2r + 1)(2t + 1)$$
$$= 4s (s + 1) - 16 rt - 8r - 8t - 3$$

or s étant entier, $s(s + 1)$ est pair donc $4s(s + 1)$ est multiple de 8 d'où

$$b^2 - 4ac = (\text{multiple de } 8) - 3$$

Donc $b^2 - 4ac$ n'est pas un carré parfait car s'il l'était, sa racine carrée serait un nombre impair (puisque lui-même est impair) Mais le carré d'un nombre impair est toujours un multiple de 8 plus 1.

En effet $(2k + 1)^2 = 4k(k+1) + 1$
$= (\text{multiple de } 8) + 1$

4. Puisque $6 = 3 \times 2$, le produit de A par B sera le même que celui obtenu en multipliant l'entier A_1 consistant en 666 <u>neuf</u> par l'entier B_1 consistant en 666 <u>deux</u>.

Or, $A_1 = 10^{666} - 1$

Donc $A \times B = A_1 \times B_1 = (10^{666} - 1) \times B_1$

$$= 10^{666} \times B_1 - B_1$$

$$= \underbrace{22 \ldots\ldots 22}_{666}\underbrace{000 \ldots 00}_{666} - \underbrace{22 \ldots\ldots 22}_{666}$$

$$= \underbrace{22 \ldots\ldots 22}_{665} 1 \underbrace{77 \ldots\ldots 77}_{665} 8$$

5. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{52}$ les 52 entiers arbitraires.

Considérons les restes de la division des a_i par 100, i.e.,

$a_j = 100b_j + r_j$

Si $r_j > 50$, posons $a_j = 100 (b_j + 1) + (r_j - 100)$

ou $a_j = 100 b'_j - r'_j$

où $b'_j = b_j + 1$
$r'_j = 100 - r_j$
et $r'_j < 50$

Si nous considérons les valeurs absolues de ces restes nous avons au plus 51 valeurs différentes (i.e.: 0, 1, 2, ..., 49, 50). Comme nous avons 52 entiers, il existe au moins deux entiers donnant lieu au même reste en valeur absolue. Soient a_j et a_k deux entiers possédant cette propriété, à savoir tels que $|r_j| = |r_k|$ Si $r_j = r_k$ alors 100 divise $a_j - a_k$ tandis que si $r_j = - r_k$ alors 100 divise $a_j + a_k$.

6. Figure dessinée par le professeur C. DeSerres (Ecole Polytechnique)