LES ORTHOGONES DE LILL

par Gabriel Garneau,
Ecole Polytechnique de Montréal

Les polynômes à une variable sont des êtres mathématiques dont le comportement global réserve peu de surprises.

En particulier si on restreint le domaine de définition d'un polynôme à coefficients réels au corps des réels, alors son domaine des valeurs sera un sous-ensemble (propre ou impropre) du corps des réels.

Donc, théoriquement, le calcul de la valeur prise par un tel polynôme pour un nombre réel particulier ne présente aucune difficulté. Cependant il est clair qu'en pratique la recherche d'une valeur numérique prise par un polynôme devient souvent une opération fastidieuse. D'autre part la recherche d'une valeur numérique prise par un polynôme se situant dans un contexte non plus théorique mais bien plutôt pratique ou expérimental il est évident que toute méthode permettant d'obtenir un résultat, qui ne s'écarte pas trop de la valeur vraie, peut être (et parfois doit être) considérée.

Il existe quantité de telles méthodes permettant de trouver une valeur approximative d'un polynôme. Le but de cet article est de décrire et d'expliquer une méthode graphique particulière appelée: méthode des ORTHOGONES DE LILL.

La méthode qui sera décrite s'applique à un polynôme à coefficients réels de degré n quelconque. Nous allons toutefois en faire la description pour le cas $n = 4$. La généralisation étant d'ailleurs tout à fait évidente ainsi qu'on pourra le constater.

Soit donc

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

un polynôme du 4e degré à coefficients réels. L'essentiel de la méthode consiste à poser sur un graphique selon une certaine disposition qui sera déterminée par la suite des segments de longueur proportionnelle aux coefficients a_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ du polynôme. Ceci fait, il faut ensuite construire une seconde ligne ayant même origine que la première: dans la construction de cette deuxième ligne intervient la valeur particulière qu'on donne à l'indéterminée x du polynôme. Enfin la valeur prise par le polynôme est trouvée en mesurant la longueur d'un certain segment orienté.

Nous allons commencer par donner une description de la méthode, suivra ensuite la justification théorique du procédé.

LILL, capitaine dans l'armée autrichienne. Publia sa construction en 1867.

DESCRIPTION

Construisons d'abord dans un coin du graphique un petit carré MNPQ dont la frontière sera orientée dans le sens horaire.

Ensuite, à partir d'un point O du graphique, construisons le segment OA_4 parallèle au segment MN, de longueur proportionnelle au coefficient a_4. L'orientation positive choisie est celle fournie par le sens de MN (donc si a_4 est positif, le segment OA_4 sera orienté du bas vers le haut; si a_4 est négatif OA_4 se dirigera vers le bas du graphique). Ensuite à partir de A_4, construisons le segment A_4A_3, parallèle au segment NP, de longueur proportionnelle au coefficient a_3 et orienté selon l'orientation fournie par NP. De même, à partir de A_3 construisons le segment A_3A_2, parallèle au segment PQ, de longueur proportionnelle au coefficient a_2 et orienté selon PQ. En épuisant ainsi la liste des coefficients de f(x), on obtient une ligne brisée dont tous les angles sont droits (puisque les segments successifs de cette ligne sont respectivement parallèles aux côtés successifs d'un carré). On appelle une telle ligne un <u>orthogone</u>.

Par exemple si le polynôme f(x) considéré est

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + 1$$

on obtient l'orthogone fondamental suivant:

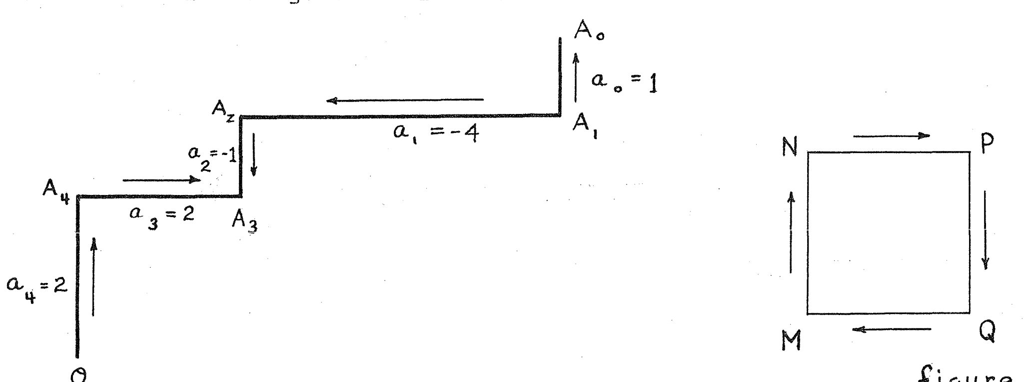

figure 1

Il est commode d'indiquer par une flèche l'orientation de chacun des segments $A_i\ A_{i-1}$.

L'orthogone fondamental construit, il faut résoudre l'équation suivante:

$$\operatorname{tg} \theta = |\alpha|$$

où θ est un angle entre 0^o et 90^o et α est la valeur pour laquelle on veut évaluer le polynôme.

Par exemple si on veut évaluer le polynôme f(x) en $x = \alpha = 1.28$, on devra résoudre

$$\operatorname{tg} \theta = 1.28$$

c'est-à-dire on trouvera $\theta \cong 52^{\circ}$

L'angle θ étant trouvé, on construit un angle qui a même mesure que θ et ayant O pour sommet et OA_4 pour un de ses côtés. Si α est positif on construit θ à gauche de OA_4; si α est négatif, on construit θ à droite de OA_4.

Appelons B_2 le point d'intersection du deuxième côté de l'angle et du segment A_4A_3 (ou son prolongement).

Elevons à partir de B_2 une perpendiculaire qui coupera A_3A_2 (ou son prolongement) en B_1. De même élevons à partir de B_1, une perpendiculaire qui coupera A_2A_1 (ou son prolongement) en B_0. Finalement à partir de B_0 construisons une perpendiculaire qui coupera A_1A_0 au point V.

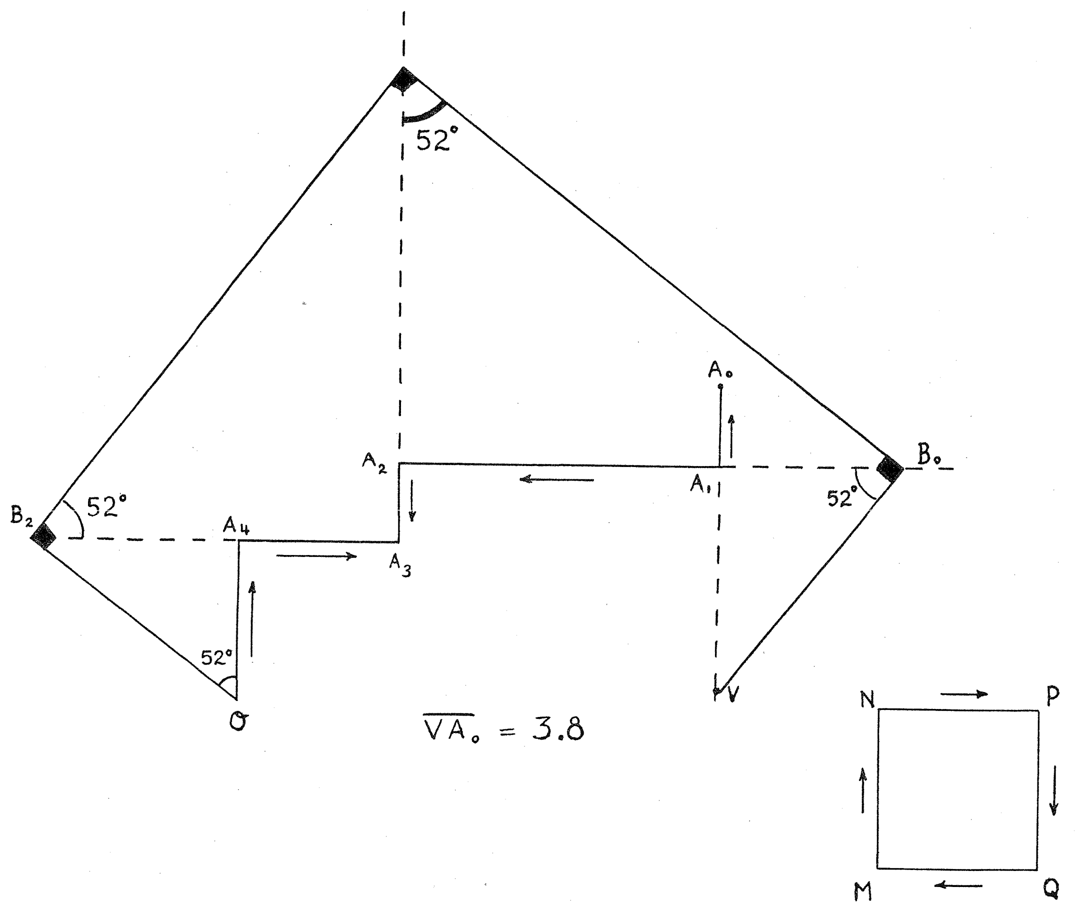

figure 2

Ainsi que nous allons maintenant le montrer $f(\alpha)$ égale la mesure algébrique du segment orienté VA_0

c'est-à-dire $f(\alpha) = \overline{VA_0}$

JUSTIFICATION

En effet:

$$\begin{aligned}
\overline{B_2A_3} &= \overline{B_2A_4} + \overline{A_4A_3} \\
&= \overline{OA_4}\ \text{tg}\,\theta + \overline{A_4A_3} \\
&= a_4\alpha + a_3
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\overline{B_1A_2} &= \overline{B_1A_3} + \overline{A_3A_2} \\
&= \overline{B_2A_3}\ \text{tg}\,\theta + \overline{A_3A_2} \\
&= (a_4\alpha + a_3)\alpha + a_2 \\
&= a_4\alpha^2 + a_3\alpha + a_2
\end{aligned}$$

En procédant de façon analogue, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{B_0A_1} &= \overline{B_0A_2} + \overline{A_2A_1} \\
&= \overline{B_1A_2}\ \text{tg}\,\theta + \overline{A_2A_1} \\
&= (a_4\alpha^2 + a_3\alpha + a_2)\alpha + a_1 \\
&= a_4\alpha^3 + a_3\alpha^2 + a_2\alpha + a_1
\end{aligned}$$

et finalement:

$$\begin{aligned}
\overline{VA_0} &= \overline{VA_1} + \overline{A_1A_0} \\
&= \overline{B_0A_1}\ \text{tg}\,\theta + \overline{A_1A_0} \\
&= (a_4\alpha^3 + a_3\alpha^2 + a_2\alpha + a_1)\alpha + a_0 \\
&= a_4\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \\
&= f(\alpha)
\end{aligned}$$

On a donc montré que $f(\alpha) = \overline{VA_0}$

Ainsi dans la figure 2, on trouve que si $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + 1$ alors $f(1.28) \cong 3.8$

Incidemment si le point V qu'on a construit coïncide avec A_o cela indique que α est un zéro du polynôme f(x).

Par exemple si on calcule f(1) à l'aide d'un orthogone, on trouve $\overline{VA_o} = o$ donc 1 est un zéro de $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

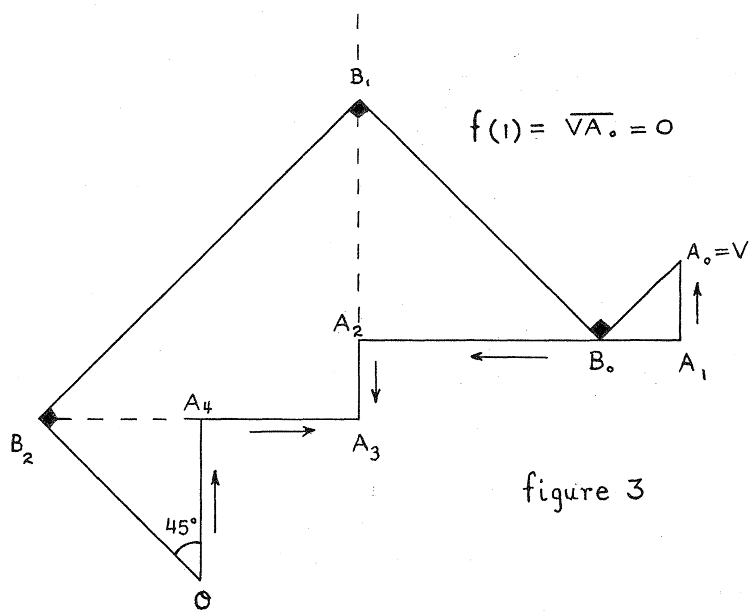

figure 3

Evidemment il est en général impossible de trouver les zéros d'un polynôme de degré quelconque grâce au procédé des orthogones de Lill. Puisque si la chose était possible, cela signifierait en particulier qu'on peut résoudre avec la règle et le compas une équation du 3e degré: ce qui est impossible. Néanmoins la construction est possible pour un polynôme de degré 2. En effet soit

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_o$$

un polynôme de degré 2 et construisons son orthogone fondamental.

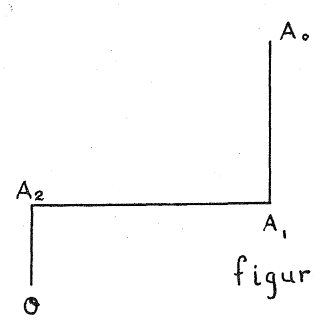

figure 4

Ensuite construisons la circonférence de diamètre OA_0. Soient M et N les points d'intersection de la circonférence et de A_2A_1 (s'ils existent)

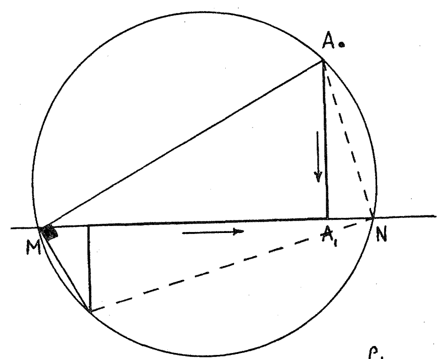

figure 5

Les angles θ_1 et θ_2 sont droits puisqu'ils sont inscrits dans une demi-circonférence, par conséquent d'après ce qui précède

$$f(tg\ \theta_1) = f(tg\ \theta_2) = 0$$

Le lecteur remarquera que ce procédé de construction donne une justification géométrique de la propriété bien connue: soit $a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$ une équation quadratique, si a_2 et a_0 sont de signe contraire, alors l'équation possède deux racines réelles distinctes. De même on peut se rendre compte si l'équation n'admet pas de racines réelles; en effet si a_2 et a_0 sont de même signe et si a_1 n'est pas "trop" grand alors le segment A_2A_1 (cf. figure 5) sera extérieur à la circonférence de diamètre OA_0 donc $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ne possèdera pas de solution réelle.

Signalons pour terminer une application intéressante de la méthode des orthogones de Lill. Dans le cas où les racines sont réelles et distinctes, le professeur André Ronveaux de l'Université de Montréal a montré qu'on peut trouver les solutions d'une équation aux différences finies homogène du deuxième ordre par ce procédé graphique.†

---

† cf. Introduction aux équations aux différences finies, par André Ronveaux, chez Lidec.
Collection: Les Mathématiques, aujourd'hui.