Solution des problèmes parus dans le Bulletin No 2

par Gabriel Garneau, directeur-adjoint

1.

	Age de Anne	Age de Marie	Différence "constante"
Quand l'âge de Anne était	x		
Marie était 3 fois plus vieille		$3x$	$2x$
Si Anne était 3 fois plus vieille que Marie l'était en ce temps-là	$9x$		
Et si Marie avait la moitié de l'âge de Anne		$4\frac{1}{2}x$	$2x$
Anne étant 2x années plus jeune	$2\frac{1}{2}x$		
Aujourd'hui Marie est deux fois plus vieille		$5x$	
Et Anne a toujours 2x années de moins	$3x$		

Comme la somme des âges est 44

$$3x + 5x = 44$$
$$x = 5\tfrac{1}{2}$$

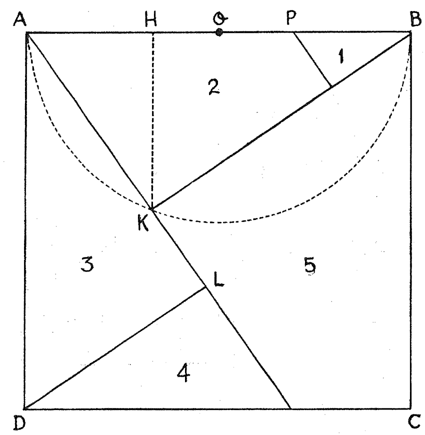
Donc: Marie a $27\frac{1}{2}$ ans
Anne a $16\frac{1}{2}$ ans

(Solution proposée par M. Eugène KICAK)

2. Réponse:

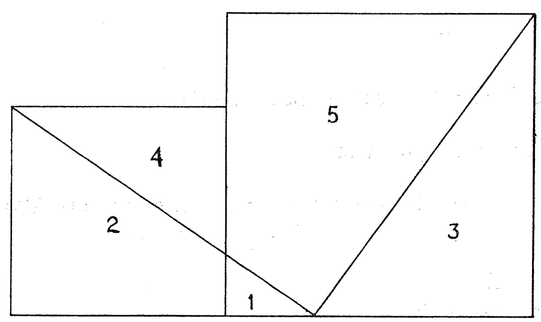
$$986\,304 \div 132 = 7472$$

3. Soit ABCD un carré. Soit O le milieu de AB. Construire une demi-circonférence de centre O et de rayon OA. A partir de H (tel que AH = 1/3 AB) élever une perpendiculaire qui coupe la circonférence en un point K. Tracer BK et AK, poursuivre AK jusqu'en M: point d'intersection avec CD. Par D, élever une perpendiculaire DL à AM. Poser sur AB un point P tel que BP = CM. Par P, élever une perpendiculaire PS à BK



Découper suivant AM, DL, BK et PS

On obtient en réarrageant les 5 morceaux:



On montre facilement que l'aire du grand carré est le double de celle du petit.

4. Soit T_n = le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire = $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$

1er cas: n pair:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^2+2n}{4}$$

$$= \frac{n^2}{4} + \frac{n^2+2n}{4}$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad \frac{n}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\,T_{\frac{n}{2}}$$

2e cas: n impair:

$$T_n = \frac{2n^2+2n}{4} = \frac{n^2+2n+1}{4} + \frac{n^2-1}{4}$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 2\,T_{\frac{n-1}{2}}$$

5. Solution: (proposée par M. Gaston Bertrand)

Soit N le plus grand des deux nombres

donc $100 < N < 200$ (on vérifie trivialement que 100 et 200 ne sont pas des solutions)

$$\begin{aligned}
10000 &< N^2 < 40000\\
1000 &< (200-N)^2 < 4099\\
32 &\leq 200-N \leq 64\\
136 &\leq N \leq 168\\
18496 &\leq N^2 \leq 28224\\
1800 &\leq (200-N)^2 \leq 2899\\
44 &\leq (200-N) \leq 53\\
147 &\leq N \leq 156\\
21609 &\leq N^2 \leq 24336\\
2100 &\leq (200-N)^2 \leq 2499\\
46 &\leq 200-N \leq 49\\
151 &\leq N \leq 154\\
22801 &\leq N2 \leq 23716\\
2200 &\leq (200-N)^2 \leq 2399\\
47 &\leq 200-N \leq 48\\
152 &\leq N \leq 153\\
23104 &\leq N2 \leq 23409\\
2300 &\leq (200-N)^2 \leq 2399\\
48 &\leq (200-N) \leq 48\\
152 &\leq N \leq 152
\end{aligned}$$

Les deux nombres sont 152 et 48

7. Correction: au lieu de "3m chiffres identiques", il faut lire "3^m chiffres identiques".

Solution: Preuve par induction

* si $m = 1$, le nombre se lit $\overline{aaa}$

  la somme des chiffres est 3a et par conséquent, le nombre est divisible par 3

* supposons la proposition vraie pour $m \geqslant 1$ et montrons qu'alors elle est aussi vérifiée pour $m + 1$. Le nombre se lit

$$\overline{\underbrace{aa \ldots a}_{3^m \text{ chiffres}} \; \underbrace{aa \ldots a}_{3^m \text{ chiffres}} \; \underbrace{aa \ldots a}_{3^m \text{ chiffres}}}$$

$$\overline{\underbrace{aa \ldots a}_{3^m \text{ chiffres}}} \quad \left(1 \; \underbrace{00 \ldots 01}_{3^m \text{ chiffres}} \; \underbrace{00 \ldots 01}_{3^m \text{ chiffres}}\right)$$

On a deux facteurs:

1) par hypothèse d'induction: le premier est divisible par 3^m

2) la somme des chiffres du second est 3, donc le second facteur est divisible par 3

Par conséquent, le nombre est divisible par 3^{m+1}

8.

$$\frac{m^5}{5} + \frac{m^3}{3} + \frac{7m}{15}$$

$$= \frac{m^5 - m}{5} + \frac{m^3 - m}{3} + \frac{7m}{15} + \frac{m}{5} + \frac{m}{3}$$

$$= \frac{m^5 - m}{5} + \frac{m^3 - m}{3} + \frac{15m}{15}$$

Or $m^5 - m \equiv 0$ (modulo 5) par le théorème de Fermat

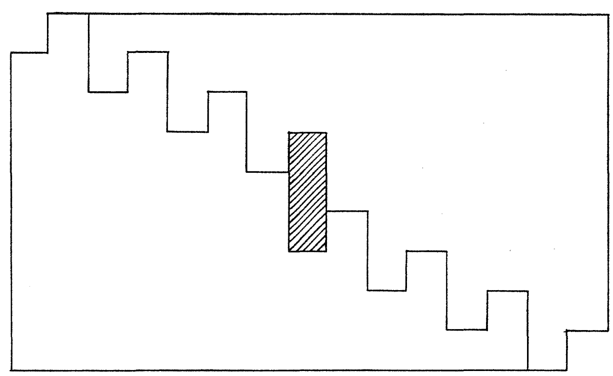
$m^3 - m \equiv 0$ (modulo 3) par le théorème de Fermat donc $\dfrac{m^5 - m}{5}$ est un entier

$\dfrac{m^3 - m}{3}$ est un entier

$\dfrac{15m}{15} = m$ est entier par hypothèse

donc: $\dfrac{m^5}{5} + \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{7m}{15}$ est toujours entier pour m entier

9.



10. Solution proposée par M. Gaston Bertrand

Considérons le nombre formé par les trois derniers chiffres

on a: $100\,A + b^2 = (10a \pm b)^2 < 1000$

$$\text{d'où} \quad 10a \pm b < 32$$

$$\text{d'ou} \quad a < 4$$

$$100\,A + b^2 = 100\,a^2 \pm 20\,ab + b^2$$

$$100\,A - 100\,a^2 = \pm 20\,ab$$

$$5(A - a^2) = \pm\,ab$$

donc ab est un multiple de 5 et comme $a < 4$, il s'en suit que $b = 5$

On trouve que le nombre se termine par 25.

Le nombre formé par les 4 derniers chiffres est un carré se terminant par 25.

On a donc:

$$100\ B + 25 = (10a + 5)^2$$

$$\text{ou} \quad B = a\ (a + 1)$$

En ne perdant pas de vue que les deux chiffres qui composent B doivent terminer le carré formé par les trois premiers chiffres, on élimine tous les produits $a(a+1)$ sauf $7 \times 8 = 56$.

Donc le nombre cherché se termine par 5625.

On sait maintenant que le carré formé par les trois premiers chiffres se termine par un 5; par conséquent le deuxième chiffre est nécessairement 2.

D'où

$$100\ C + 25 = (10a + 5)^2 \quad \text{avec} \quad a < 3$$

$$C = a\ (a + 1)$$

On a le choix entre $C = 1 \times 2 = 2$

$C = 2 \times 3 = 6$

Le nombre est soit 225625, soit 625625

Or 625625 n'est pas un carré parfait.

Le nombre cherché est donc 225625.