La méthode des graphes

par Claude Tricot

Le 14 mars dernier, le professeur Tricot a donné, dans le cadre des rencontres de l'AMQ, une intéressante conférence intitulée: "Les mathématiques et les (bonnes) affaires". A la suite de cette rencontre, il nous a fait parvenir cet article qui a d'abord paru dans le no 3 d'Actualités Economiques.

Si l'on veut parler de l'introduction des méthodes propres aux mathématiques, dans les sciences administratives, on ne peut tout d'abord que constater que les problèmes d' « affaires », assez nombreux, dont les mathématiciens se sont préoccupés ne constituent pas un corps de doctrine. Il y a de tout là-dedans. Le mathématicien semble être un homme qu'on vient voir lorsqu'on est embarrassé, comme les grecs firent d'Archimède, et la nature de cet embarras peut être très diverse mais ne porte pas nécessairement sur des problèmes généraux. Cela pourrait sembler malheureux car il cherche des solutions optima mais comme il s'agit de questions particulières, ce sont des optima relatifs. Autant dire que ce ne sont pas des optima du tout. Mais le vrai mathématicien s'en moque, car c'est avant tout un homme frivole que la « pratique » n'intéresse pas en tant que telle : sa méthode le prouve qui consiste à schématiser une situation qu'on ne reconnaît alors plus car son être réel a disparu ; mieux, moins le problème envisagé a d'être, moins le mathématicien se sent gêné. C'est pourquoi le géomètre dessine ses figures plutôt que de les découper, et c'est apparemment pourquoi encore l'histoire des mathématiques est pleine de farces : le probabiliste extrait gravement des boules colorées de son urne, tel un prestidigitateur des lapins de son chapeau. Euler étudie les différentes façons d'emprunter les ponts de Koenigsberg. Gauss s'efforce à placer huit dames sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'elles ne puisse prendre sa voisine, Pascal qui, en d'autres temps, s'écrie « quelle vanité que la peinture » se penche avec charité sur les oisifs joueurs en résolvant pour eux le problème des parties.

*
* *

Qu'est-ce qu'un graphe ? Ce peut être une aide non négligeable pour mener à bien dans un temps minimum la construction du premier sous-marin polaris, ce peut être encore un moyen de fournir une solution à ce célèbre passeur dont l'ambition était de conduire un loup, une chèvre et un chou d'une rive à l'autre d'une rivière.

Essayons d'aider ce passeur. Il faut d'abord le déshumaniser : on le représentera par la lettre P. De même, le loup sera L, la chèvre C et le chou H.

Plutôt que d'entrer immédiatement dans les soucis légitimes d'un passeur devenu symbole, on s'appliquera à construire tous les états possibles d'une rive. Un tel état sera représenté par une réunion de lettres.

Si un état est possible, son complémentaire l'est également puisque c'est l'état de l'autre rive : il suffit donc d'inventorier d'abord les états où le passeur n'est pas. Ce sont, évidemment, les suivants : LH, L, C, H, $\emptyset$ à cause de la propension du loup non surveillé à manger la chèvre et de la chèvre à manger le chou, circonstance qui élimine certaines réunions théoriquement possibles. Le dernier symbole représente l'absence de tout individu sur la rive. Les états complémentaires sont : PC, PCH, PLH, PLC, $PLCH$. On a donc dix états possibles divisés en deux groupes.

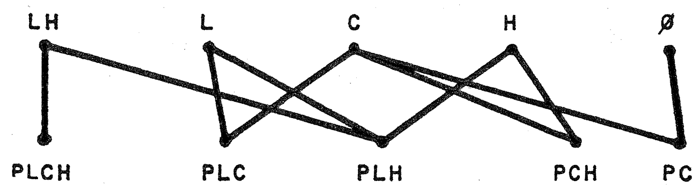
On se préoccupera maintenant du passage d'un état à un autre état. Ce passage est dominé par deux lois :

a) Un élément d'un groupe ne « s'applique » que sur un élément de l'autre groupe (ou l'état correspondant n'est suivi que par un état de l'autre groupe). Cela résulte du fait qu'un individu autre que le passeur ne peut traverser seul. Au surplus, si une application est possible d'un élément d'un groupe sur un élément de l'autre, l'application inverse est également possible, ce qui permet de ne considérer que les applications du deuxième groupe sur le premier, par exemple.

b) L'application d'un élément du deuxième groupe sur un élément du premier se fait par soustraction d'une lettre au moins et de deux au plus (car c'est une règle que le passeur ne passe qu'un individu à la fois).

Ainsi : *PC* s'applique sur Ø et sur *C*
PCH " " *H* " " *C*
PLH " " *LH* sur *L* et sur *H*
PLC " " *L* et sur *C*
PLCH " " *LH*

D'où le graphe, qui décrit les états possibles (points) et les passages possible d'un état à un autre (arc).



Que cherche-t-on ? à passer de l'état *PLCH* à l'état Ø : il suffit de trouver un chemin qui joigne les deux points correspondants sur le graphe.

On voit qu'il en existe deux :

PLCH —> *LH* —> *PLH* —> *L* —> *PLC* —> *C* —> *PC* —> Ø

et

PLCH —> *LH* —> *PLH* —> *H* —> *PCH* —> *C* —> *PC* —> Ø

qui fournissent les solutions du problème auxquelles on pourra redonner de l' « être » en traduisant : le passeur transporte la chèvre, il revient seul, il transporte le chou, ramène la chèvre, transporte le loup, revient seul, emmène la chèvre et ainsi pour l'autre.

On voit bien ici que la méthode mathématique dans ce type de problèmes porte en soi ses lacunes : elle s'enferme dans ses hypothèses. Il n'est pas question d'apprivoiser le loup ni de cacher le chou, ni de mettre la chèvre à la nage : les hypothèses étant mises en place le schéma devient rigide ; mais y a-t-il d'autres façons de raisonner ?

D'autre part, le problème se réduisait, une fois posé, à la recherche d'un chemin et ceci appelle deux remarques : tout d'abord on peut concevoir que cette recherche, simple ici à cause du petit nombre de points et des arcs, puisse nécessiter une méthode systématique dans un cas plus compliqué. Une telle méthode est un *algorithme* et la recherche d'un algorithme est la deuxième phase dans la résolution des problèmes de graphes, celle qui suit l'établissement du graphe.

La deuxième remarque est que, trouver un chemin quelconque n'est pas toujours suffisant : on peut devoir rechercher un chemin ayant certaines caractéristiques données et c'est ce qui arrive dans les problèmes d'ordonnancement que la publicité a lancés sur le marché des cervelles sous la rubrique « système P.E.R.T. ».

*

* *

Les préoccupations de ce passeur dont nous parlions sont vraiment d'un autre âge ; ce sont celles d'une époque où le loup avait une existence autre que zoologique et se permettait de manger les chèvres. S'il fallait situer dans le temps cette histoire on pourrait dire que cet intérêt pour le chou est l'indice d'une civilisation agricole, la présence du passeur nous ferait peut être choisir le temps de St-Julien l'Hospitalier, mais, plus profondément, j'y remarque l'absence de transport en commun et de tout souci de la vitesse.

À l'inverse, le problème d'ordonnancement en est un d'hommes pressés dans une société organisée. Il s'agit toujours dans ces problèmes, d'administrer les activités de corps de métiers distincts, accomplissant chacun de son côté différentes tâches devant concourir à la réalisation d'une certaine œuvre. On se propose, de plus, on ne sait pourquoi au juste mais c'est ainsi, d'accomplir le tout dans un temps minimum, ou de saisir quelles tâches devraient être accélérées si l'on voulait raccourcir la durée prévue initialement.

Il ne saurait être question, dans le cadre d'un tel article, de faire un exposé complet des méthodes utilisées dans ce type de problèmes. Aussi, avant de donner le principe de la méthode de chemin critique peut-on offrir une très succincte bibliographie.

Celui qu'intéresse en elle-même la théorie des graphes peut consulter le livre de Claude Berge : *Théorie des graphes et ses applications* (Dunod, 1958). Celui qui ne recherche que quelques données succinctes concernant le système P.E.R.T. peut utiliser l'article de R. Ventura extrait du no 25 de la *Revue française de Recherche opérationnelle*.

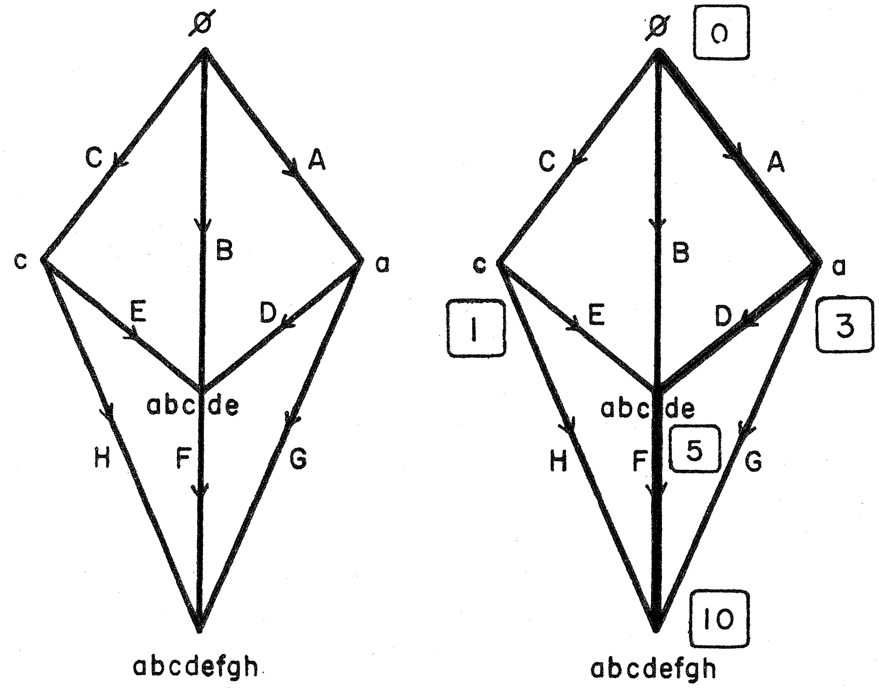
Une connaissance plus complète des problèmes d'ordonnancement proprement dits se trouve dans le petit livre de A. Kaufmann et G. Desbazeille : *La méthode du chemin critique* (Dunod, 1964), ou dans celui de B. Roy : *Les problèmes d'ordonnancement, applications et méthodes* (Dunod, 1964), lequel comprend en outre des exemples très intéressants d'applications (construction d'un bâtiment, utilisation d'un coffrage-tunnel, entretien d'une raffinerie, construction d'un navire).

Cela dit, on remarquera que, dans tous ces problèmes, on a affaire à deux sortes de concepts : celui de « tâche » à accomplir (creuser un fossé ou aller chercher des allumettes) en un temps que l'on peut, à une variance près, apprécier et celui d' « état » d'achèvement d'une partie des travaux nécessaire à la mise en œuvre d'une nouvelle tâche. Ces deux concepts peuvent indifféremment être utilisés comme « points » dans la construction du graphe. Dans le premier cas, un arc reliera deux tâches successives ; il représentera une « contrainte », celle du temps obligé entre les dates d'achèvement de ces tâches. Dans l'autre, l'arc reliera deux états tels que l'un ne pourrait exister sans l'autre ; il représentera la tâche effectuée entre les deux états considérés.

Il est curieux d'observer que les deux types de graphes ont fleuri en même temps sur les deux rives de l'Atlantique : l'un en France, c'est le premier, l'autre aux États-Unis, c'est le second. On ne sait quel est le plus commode, probablement le premier, mais on sait quel est le plus connu : c'est le second.

Supposons, par exemple, que l'œuvre nécessite 8 tâches : *A B C D E F G H ;* on pourra désigner par *a b c d e f g h* les produits de ces différentes tâches. On peut supposer encore que *D* nécessite *a* ; *E*, *c* ; *F*, *b d e* ; *G*, *a* ; *H*, *c* ; on pourra tracer le graphe P.E.R.T. ayant pour points les états et on obtient ce qui suit (p. 568).

La notion de temps intervient dans la durée des tâches. Supposons que *A* dure 3 jours ; *B*, 4 jours ; *C*, un jour ; *D*, 2 jours ; *E*, 2 jours ; *F*, 5 jours ; *G*, 6 jours ; *H*, 2 jours. Ces durées permettent de dater les états à partir de l'origine des temps qui sera le début des travaux. La date de réalisation de *a* sera 3 ; celle de *c*, 1 ; celle de *a b c d e*, le plus grand des 3 nombres : $3 + 2$, $1 + 2$, 4, c'est-à-dire 5 ; celle de *a b c d e f g h*, obtenue en tenant compte des dates respectives de *a*, *c* et *a b c d e*, sera le plus grand des nombres :



3 + 6, 5 + 5, 1 + 2, c'est-à-dire 10. La durée totale sera donc de 10 jours.

Pour l'accomplissement de certaines tâches, on ne sera pas trop pressé : ainsi de la tâche G qui nécessite 6 jours quand on dispose de 7. Elle présente un « intervalle de flottement » et si l'on veut raccourcir la durée totale des travaux, on ne devra pas agir sur l'accomplissement de cette tâche.

En revanche, les tâches *F*, *D*, *A* n'en présentent pas : elles constituent le « chemin critique » dont il faudra surveiller l'exécution de près.

Cet exemple est schématique comme une histoire de passeur. La réalité est toujours beaucoup plus complexe.

Tout d'abord, un graphe peut contenir plusieurs centaines d'arcs et il devient nécessaire d'utiliser un algorithme pour déterminer le chemin critique (algorithme de Ford par exemple, ou de Bellman-Kalaba). Des programmes pour calculatrice sont fondés sur ces algorithmes.

Dans l'utilisation d'un algorithme, il est nécessaire que deux états ne soient reliés que par un arc unique. Or, dans la pratique il peut se présenter deux tâches joignant deux états consécutifs. On introduit alors un arc fictif de durée nulle en décomposant en deux l'état-extrémité de ces deux arcs que l'arc fictif joindra. On peut signaler que le premier type de graphe (le moins connu) ne présente pas l'inconvénient de créer des arcs fictifs.

De plus, il pourrait se présenter que les tâches A et E, par exemple, du graphe précédent, dont une partie s'effectue entre les dates 1 et 3 recourent à la même machine bien qu'elles ne concourent pas à fabriquer le même objet. Le graphe s'en trouverait modifié.

En outre, des durées ont été fournies qui tiennent compte, certainement, de la main-d'œuvre utilisée. Or, il peut se trouver, sur un chantier, que la main-d'œuvre puisse être répartie entre plusieurs tâches ; la notion de durée devient alors plus floue car la durée de l'une sera fonction de la durée de l'autre : le schéma proposé ne coïncide plus de manière satisfaisante avec la réalité.

On pourrait probablement allonger la liste des écueils rencontrés. Le réel est contrariant par principe, comme Hegel l'avait bien vu, tandis qu'un beau raisonnement est bien satisfaisant. Cela dit, l'outil est bien utile, il n'en faut pas douter, mais nous voudrions terminer en faisant ressortir après Bernard Roy [1] « la vanité qu'il y a à prétendre résoudre ces problèmes par un procédé général, conçu indépendamment du problème concret considéré ». C'est la morale même de la recherche opérationnelle.

Claude TRICOT,
*professeur à l'École des
Hautes Études commerciales
(Montréal).*

1. *Les problèmes d'ordonnancement, op. cit.*, p. 13.