Correction de copies dans une classe surchargée
par Carcanague

Extrait du bulletin des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (no 238)

Il est arrivé à chacun d'entre nous d'être gratifié d'une classe exceptionnellement nombreuse, et il faut bien dire, hélas!, que la règle tend à confirmer l'exception. Il est alors question pour nous, non pas d'organiser la pénurie, comme disait un préposé à l'Education Nationale (je ne sais plus lequel), mais bien la pléthore de copies hebdomadaires.

La solution adoptée quelquefois consiste à partager la classe en deux groupes, la correction étant assurée alternativement pour chacun des groupes. Mais il est bien connu que le travail fourni pour une préparation est largement conditionné par la perspective d'une notation par le professeur. Le tirage au sort pallie cet inconvénient; par contre, il n'assure pas un nombre égal de notes pour tous les élèves.

Le problème se pose de la manière suivante: étant donné l'ensemble E des élèves, à n éléments, former une famille de sous-ensembles Ai, à p éléments, tels que pour i et j différents, $A_i \cap A_j$ contienne un nombre r d'éléments, r étant de l'ordre de p/2, et ceci de façon que, dans l'ensemble des A_i, on retrouve p fois chaque élément de E. Si par exemple $p = 30$, la correction de l'ensemble A_{i+1} venant après celle de A_i assurera le renouvellement de 15 copies.

Or, il existe une solution de ce problème lorsque n est un nombre premier de la forme $4r - 1$ (ou une puissance impaire d'un tel nombre). On sait alors qu'on peut donner à E une structure de corps de caractéristique n (v. Bourbaki, Corps commutatifs). Un tel corps possède les propriétés suivantes:

1) L'ensemble des carrés, soit A_o, admet $p = 2r$ éléments: a_o, b_o, $\ldots l_o$;
2) Si A_k est l'ensemble des éléments de la forme

$$a_k = a_o + k,\ b_k = b_o + k,\ \ldots,\ l_k = l_o + k,$$

l'intersection de A_k et A_k, contient r éléments;

3) Dans l'ensemble des n A_k chaque élément de E intervient 2r fois.

Exemple: Soit une classe contenant 47 élèves, numérotés de 0 à 46; le corps est alors celui des entiers mod.47; les carrés sont: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42; soit $p = 24$ éléments. Ces élèves ont leur copie corrigée la première semaine.

La deuxième semaine, sont corrigées les copies des élèves de A_1, soient: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, 5, $\underline{7}$, $\underline{8}$, $\underline{9}$, 10, 13, 15, $\underline{17}$, $\underline{18}$, 19, 22, $\underline{25}$, 26, $\underline{28}$, 29, 33, 35, $\underline{37}$, 38, 43.

Parmi eux, $r = 12$ (soulignés), se trouvaient dans la première semaine contre 12 nouveaux. Et ainsi de suite pour les semaines suivantes...

Cependant, il subsiste deux inconvénients:

1° L'administration ne pouse pas la complaisance jusqu'à nous fournir un effectif premier de la forme $4r - 1$.
2° Le cycle complet assurant un nombre de notes uniforme comprendrait 47 semaines, et nous tenons à nos vacances.

On peut alors utiliser différemment la propriété ci-dessus, par exemple, en sollicitant le corps à base 7, car 7 est un diviseur de 28, nombre approximatif de semaines si l'on déduit les compositions. Les 47 élèves sont alors répartis en six groupes de 7 et un de 5 (légèrement perturbé), chacun de ces groupes étant numéroté de 0 à 6 avec le cycle suivant pour les corrections:

$$(0, 1, 2, 4); (1, 2, 3, 5); (2, 3, 4, 6); (3, 4, 5, 0); (4, 5, 6, 1); (5, 6, 0, 2); (6, 0, 1, 3).$$

Cela conduirait à corriger chaque semaine 27 copies environ.

Si quelque collègue était intéressé plutôt par l'aspect curieux que par le côté délectable [en clair, par les propriétés 1), 2), 3), plutôt que par l'application que j'en propose] , voici quelques références:

1) La propriété est courante: voir par exemple le Bulletin no 198, page 196, théorème 6 (il faut ajouter 0, carré de lui-même).

2) Cela revient à étudier le nombre de solutions de l'équation: $X^2 - Y^2 = k$, où k est un élément donné du corps, différent de 0. Ce problème est posé en exercice dans Bourbaki: Algèbre, chap. V, § II, ex. 3, 4, 5.

3) La démonstration ne présente pas de difficulté.

Le cas où $n = 4r+1$ conduit à un résultat moins parfait, le nombre d'éléments communs à deux A_i étant égal de manière assez anarchique à r ou $r+1$.

Reste posé le problème le plus général énoncé plus haut avec n, p, r, quelconques, dont j'ignore s'il a été envisagé.

CARCANAGUE

(Lycée B.-Pascal, Clermont-Ferrand).