QUELQUES PARADOXES MATHEMATIQUES

2e partie

Les paradoxes étudiés dans la première partie de cet exposé illustrent les pièges dans lesquels on peut tomber. Bien entendu, ces exemples sont exagérés, ils ont été rédigés de façon à obtenir les conclusions étranges mais ils n'en demeurent pas moins caractéristiques des types d'erreurs auxquelles on est exposé. Voici quelques observations concernant ces divers types.

Dans le cas d'applications fautives de règles et de théorèmes, il faut connaître exactement les énoncés des théorèmes et les conditions dans lesquelles ils s'appliquent. Pour cela, il n'y a qu'une méthode: les apprendre correctement.

Pour les cas de généralisations hâtives, disons simplement qu'il faut prendre le temps de formuler clairement ce qu'on veut faire.

Quant aux surprises découlant de la notion d'infini, elles sont dues au fait que l'on utilise ce mot dans plusieurs sens intuitifs différents. L'on doit surtout éviter d'étendre aux ensembles infinis les propriétés des ensembles finis. Ce n'est qu'une fois les définitions bien posées qu'il est possible de travailler. Le sophisme de la diagonale d'un carré égale à la somme de deux de ses côtés n'offre pas de difficulté: dès que l'on précise (comme on le fait en calcul différentiel et intégral) la notion de limite, il apparaît clairement erroné.

En ce qui concerne les abus de figures, la source de l'erreur est profonde: elle est due à l'absence des axiomes d'ordre (i.e. de séparation). Lorsqu'on ajoute ces axiomes, un recours aux figures devient tout à fait inutile d'où l'élimination de la source d'erreurs.

La meilleure façon d'éviter les erreurs est d'analyser les propositions avec lesquelles on travaille et pour cela la <u>logique mathématique</u> ou <u>logique symbolique</u> est particulièrement bien adaptée.

Les phrases que nous considérons en mathématiques sont exclusivement soit vraies, soit fausses, on les appelle des <u>propositions</u> ou des <u>énoncés.</u> Nous dirons qu'une proposition P admet deux VALEURS de vérité, le VRAI et le FAUX, notées respectivement V et F.

En logique et en mathématique, on utilise des assemblages de signes $p \Rightarrow q$, $p \& q$, $p \vee q$, $\sim p$, $p \Leftrightarrow q$ (où p et q sont des propositions) qui se lisent comme suit:

$p \Rightarrow q$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{p implique q} \\ \text{si p alors q} \\ \text{p seulement si q} \\ \text{q si p} \\ \text{q est condition nécessaire pour p} \\ \text{p est condition suffisante pour q} \\ \text{p entraîne q} \end{array} \right.$

$p \& q$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{p et q} \\ \text{p mais q} \\ \text{p quoique q} \end{array} \right.$

$p \vee q$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{p ou q (ou les deux)} \\ \text{p à moins que q} \end{array} \right.$

$\sim p$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{non p} \\ \text{il est faux que p} \end{array} \right.$

$p \Leftrightarrow q$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{p est équivalente à q} \\ \text{p si et seulement si q} \\ \text{p est condition nécessaire et suffisante pour q} \end{array} \right.$

et qui sont des propositions dont la vérité ou la fausseté est déterminée à l'aide des tables suivantes:

p	q	p & q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

p	$\sim p$
v	f
f	v

Remarque. Une VARIABLE propositionnelle est une lettre, par exemple p, q, qui peut être remplacée par une proposition spécifique. Par extension du langage les variables propositionnelles seront aussi appelées propositions.

Ce symbolisme est particulièrement utile pour exprimer des théorèmes de logique employés dans une preuve. C'est ainsi que le raisonnement par l'absurde s'écrit sous la forme

$$(1) \qquad (\sim p \Longrightarrow (q \,\&\, \sim q)) \Longrightarrow p$$

et la contraposition comme

$$(2) \qquad (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p).$$

On vérifie que le raisonnement par l'absurde et la contraposition sont des lois logiques ou encore des tautologies en ce sens qu'elles sont vraies quelle que soit la valeur de vérité de p et quelle que soit la valeur de vérité de q. Pour cela, il suffit de construire les tables de vérité suivantes qui présentent tous les cas possibles:

p	q	$\sim p$	$q \,\&\, \sim q$	$\sim p \Longrightarrow (q \,\&\, \sim q)$	$(\sim p \Longrightarrow (q \,\&\, \sim q)) \Longrightarrow p$
v	v	f	f	v	v
v	f	f	f	v	v
f	v	v	f	f	v
f	f	v	f	f	v

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	v	v
f	f	v	v	v

La réciproque de $p \Longrightarrow q$ est par définition $q \Longrightarrow p$. La méthode des tables de vérité permet de vérifier que $p \Longrightarrow q$ n'est pas logiquement équivalente à sa réciproque i.e. que $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$ ne sont pas toujours vraies en même temps ou fausses en même temps ou encore que $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longrightarrow p)$ n'est pas une tautologie.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	v	v

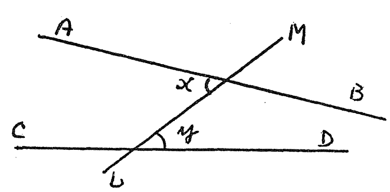
Voici quelques tautologies utiles:

$$p \Leftrightarrow p$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \quad q$$
$$p \ (q \quad r) \Leftrightarrow (p \ q) \ (p \ r)$$
$$p \ (q \ r) \Leftrightarrow (p \ q) \ (p \ r)$$
$$p \ q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$$
$$p \ q \Leftrightarrow (p \Rightarrow \quad q)$$
$$(p \ q) \Leftrightarrow p \quad q$$
$$(p \ q) \Leftrightarrow p \quad q$$
$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

EMPLOI DES THEOREMES (1) et (2).

Exemple 1. Les droites AB et CD sont coupées par une droite LM. Si les angles x et y ne sont pas égaux, montrer que les droites AB et CD ne sont pas parallèles.

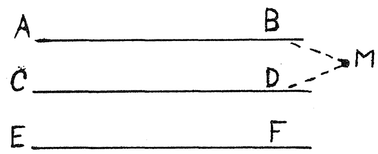
Solution. Cet énoncé n'est autre que la contraposition du théorème suivant: "Si deux droites parallèles distinctes sont coupées par une sécante alors les angles alternes-internes sont égaux".



Par suite la proposition est vraie.

Exemple 2. Montrer que si deux droites distinctes sont parallèles à une troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Solution. Nous allons donner une démonstration par l'absurde. Supposons la proposition fausse c'est-à-dire supposons l'antécédent de l'implication vrai et le conséquent faux (en utilisant la tautologie $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \mathbin{\&} \sim q)$). Si AB est $\parallel$ à EF, si CD est $\parallel$ à EF et si AB et CD ont un point M en commun, alors il existe deux $\parallel$s distinctes à la droite EF qui passent par M. Ceci est évidemment faux et le théorème est démontré.



Exemple 3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Solution. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Observons d'abord que le plus petit diviseur > 1 d'un entier $a > 1$ est un nombre premier (ceci résulte de la décomposition unique d'un entier en ses facteurs premiers).

Considérons maintenant le nombre $N = (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n) + 1$.
N n'est divisible ni par p_1, ni par $p_2, \ldots$, ni par p_n. Le plus petit diviseur de N est donc un nombre premier qui n'apparaît pas dans la liste, et on obtient une contradiction.

QUELQUES PROBLEMES DE LOGIQUE

Exemple 1. Un homme dit à son créancier "je vous paierai seulement si je trouve un emploi". Ayant trouvé un emploi, il refuse de le payer, ce que voyant son créancier le poursuit pour ne pas avoir tenu sa promesse. Peut-il gagner le procès?

Solution. Non, car si M et P désignent respectivement les propositions

je vous paierai

je trouve un emploi

tout ce que le débiteur a dit, est : "$M \Rightarrow P$" et non "$P \Rightarrow M$".

Car on observe que dans la langue française, les propositions suivantes sont équivalentes:

"Je vous paierai si je trouve un emploi".

"Si je trouve un emploi, alors je vous paierai"

"Que je travaille est une condition nécessaire pour que je vous paie".

La deuxième formulation indique clairement qu'il s'agit d'une proposition de la forme $M \Rightarrow P$ où M désigne "je vous paierai" et P désigne "je trouve un emploi". Cette proposition est évidemment différente de la proposition $P \Rightarrow M$.

$M \Rightarrow P$ est une proposition vraie dans le cas où M est faux.

Exemple 2.. Fournir à l'argument suivant une conclusion valable:

"S'il se rend à une soirée, il n'oublie pas de se peigner.
Pour plaire, il faut être soigné.
S'il fume de l'opium, il ne se maîtrise pas.
S'il se peigne, il plaît.
Il ne porte des gants de chevreau glacé que s'il se rend à une soirée.
Ne pas se maîtriser suffit pour paraître négligé.
Donc ...".

Solution. Posons.

P pour "il se rend à une soirée"

Q pour "il se peigne"

R pour "il plaît"

S pour "il est soigné"

T pour "il fume de l'opium"

U pour "il se maîtrise"

V pour "il porte des gants de chevreau glacé".

L'argumentation précédente peut s'écrire comme suit symboliquement:

$$P \Rightarrow Q$$
$$R \Rightarrow S$$
$$T \Rightarrow \sim U$$
$$Q \Rightarrow R$$
$$V \Rightarrow P$$
$$\sim U \Rightarrow \sim S$$

ou en regroupant les prémisses:

$V \Rightarrow P$

$P \Rightarrow Q$

$Q \Rightarrow R$

$R \Rightarrow S$

$S \Rightarrow U$ (en contraposant $\sim U \Rightarrow \sim S$)

$U \Rightarrow \sim T$ (en contraposant $T \Rightarrow \sim U$).

La conclusion à tirer apparaît nettement, c'est $V \Longrightarrow \sim T$, c'est-à-dire il ne porte des gants de chevreau glacé que s'il ne fume pas d'opium.

Exemple 3. Dans un salon de coiffure, il y a 3 coiffeurs, Jean, Michel et Pierre. Au moins l'un deux doit être présent durant les heures de travail. Mais récemment Michel est tombé malade, ce qui exige de Pierre qu'il soit avec Michel quand Michel est dehors. Est-il possible à Jean de sortir durant la journée?

Solution. Oui. En effet, posons

P pour "Jean travaille"

Q pour "Michel travaille"

R pour "Pierre travaille"

La question posée revient à demander s'il est possible que les 3 propositions suivantes soient simultanément vraies:

$$P \vee Q \vee R$$

$$\sim Q \supset \sim R$$

$$\sim P$$

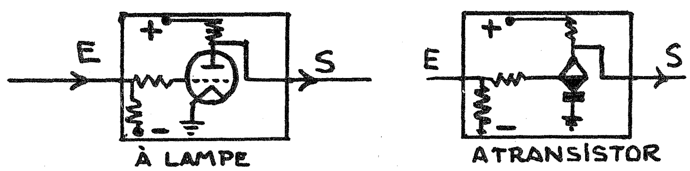
ce qui a lieu si P et R sont fausses et Q est vraie, i.e. si Jean est sorti, ainsi que Pierre, mais que Michel travaille. On peut trouver les solutions en considérant le tableau suivant:

	P	Q	R	$(P \vee Q \vee R)$	$(R \Longrightarrow Q)$	$(\sim P)$
	V	V	V	V	V	F
	V	V	F	V	V	F
	V	F	V	V	F	F
	V	F	F	V	V	F
→	F	V	V	V	V	V
→	F	V	F	V	V	V
	F	F	V	V	F	V
	F	F	F	F	V	V

PROBLEMES SUR LES CIRCUITS ELECTRIQUES

Voici quelques diagrammes qui illustrent comment on peut utiliser des moyens électriques ou électroniques pour reproduire une proposition donnée et vérifier si elle est vraie ou fausse. Les grands calculateurs sont d'ailleurs dotés d'organes logiques.

Voici par exemple un circuit que nous allons appeler BLOC NEGATION $-\boxed{N}-$. Il y a un fil d'entrée E et un fil de sortie S, et le bloc a la propriété suivante: si le fil d'entrée est chargé, celui de la sortie ne l'est pas et réciproquement.

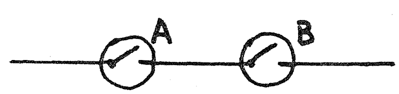


On peut aussi considérer un interrupteur comme une proposition.

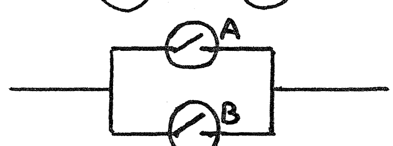
Proposition A vraie

Proposition A fausse

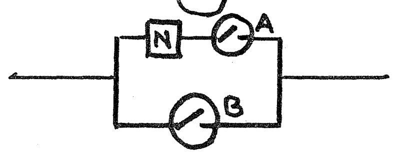
Par suite, on peut concevoir les modèles électriques des propositions suivantes



A & B



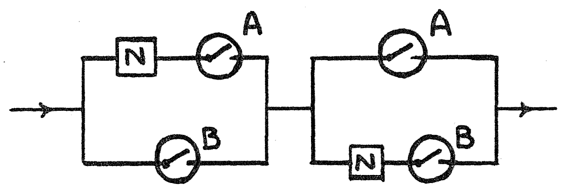
A ∨ B



A ⇒ B

Le dernier modèle est valable puisque

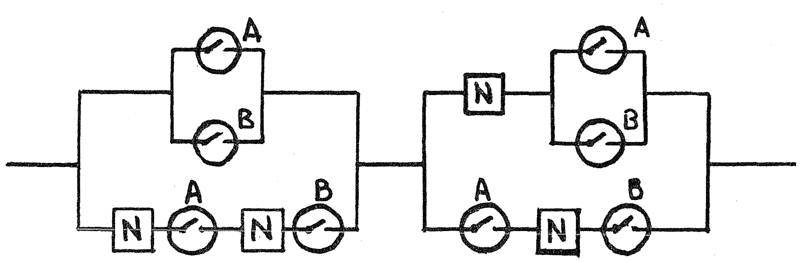
$A \Longrightarrow B$ est équivalent à $(\sim A) \vee B$.



$A \Leftrightarrow B$

parce que $A \Longleftrightarrow B$ est équivalent à $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$.

Le circuit suivant représente la tautologie $\sim (A \vee B) \Longleftrightarrow (\sim A \& \sim B)$. Quelle que soit la position des interrupteurs A et B, si l'on envoie du courant à gauche, il y a du courant à droite.



Exemple 1. Pour allumer ou éteindre la lumière dans un escalier, on dispose de deux commutateurs (susceptibles de prendre chacun deux positions 1 et 2) placés l'un en haut et l'autre en bas. Construire un circuit électrique qui allume ou éteint la lumière sitôt que l'on manoeuvre l'un ou l'autre des commutateurs.

Solution. Désignons par P et Q respectivement les propositions

"Le commutateur du haut est en position 1"

"le commutateur du bas est en position 2"

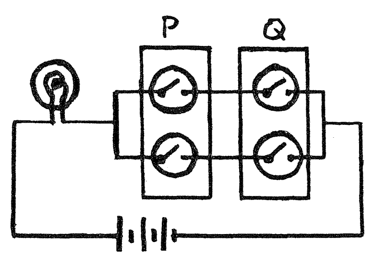
et considérons la table suivante

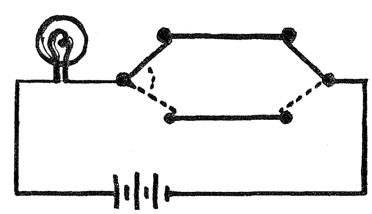
P	Q	Valeur de vérité cherchée	conjonction représentative
v	v	v (il y a lumière)	$P \,\&\, Q$
v	f	f (il n'y a pas lumière)	$P \,\&\, \sim Q$
f	v	f	$\sim P \,\&\, Q$
f	f	v	$\sim P \,\&\, \sim Q$

La lumière est allumée si et seulement si la proposition suivante est vraie.

$$(P \,\&\, Q) \vee (\sim P \,\&\, \sim Q)$$

ce qui suggère d'associer à chaque commutateur deux interrupteurs couplés de sorte que l'un est fermé quand l'autre est ouvert pour obtenir le circuit suivant





C'est cette dernière disposition qui est utilisée par les électriciens.

Exemple 2. Un comité de trois membres désire employer un montage électrique afin d'enregistrer un vote secret à majorité simple. Dessiner un circuit tel qu'il suffise que chaque membre appuie sur un bouton s'il vote "oui" (et n'appuie pas s'il vote "non") pour qu'un signal s'allume si la majorité des membres du comité a voté oui.

Solution. Désignons par P, Q et R respectivement les propositions suivantes:

"le premier membre vote oui"

"le second membre vote oui"

"le troisième membre vote oui".

Considérons la table suivante

P	Q	R	valeur de vérité cherchée	conjonction représentative
v	v	v	v	$P \& Q \& R$
v	v	f	v	$P \& Q \& \sim R$
v	f	v	v	$P \& \sim Q \& R$
v	f	f	f	$P \& \sim Q \& \sim R$
f	v	v	v	$\sim P \& Q \& R$
f	v	f	f	$\sim P \& Q \& \sim R$
f	f	v	f	$\sim P \& \sim Q \& R$
f	f	f	f	$\sim P \& \sim Q \& \sim R$

La mesure est adoptée si et seulement si la proposition suivante est vraie:

$$(P \& Q \& R) \vee (P \& Q \& \sim R) \vee (P \& \sim Q \& R) \quad (\sim P \& Q \& R)$$

qui suggère le circuit suivant: