CONCOURS DES COLLEGES CLASSIQUES

30 mars 1966

Les concurrents choisissent deux problèmes dans chacune des trois parties.

PARTIE A

1. Démontrer que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} .$$

2. Si $f(x) = f(-x)$ et $f'(x) = f'(-x)$ pour tout x, démontrer que $f(x)$ est une constante.

3. Démontrer géométriquement que l'équation $x = \sqrt{1 + x^2}$ n'admet pas de racine réelle.

PARTIE B

1. Dans quelle base l'équation $5X^2 - 50X + 125 = 0$ admet-elle les nombres 5 et 8 comme racines?

2. Démontrer que 111,111,111,111 n'est pas la somme de deux carrés parfaits.

3. Si $[x]$ désigne la partie entière de x, trouver tous les x non-négatifs satisfaisant l'équation

$$[x] = \frac{3x}{4}$$

PARTIE C

1. Si a et b sont deux nombres réels quelconques, démontrer alors que:

$$\frac{a + b}{2} \leqslant \log \left(\frac{10a + 10b}{2} \right)$$

où log désigne le logarithme vulgaire (ou à base 10).

2. Supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres connus; trouver alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_1 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_2 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + 0x_n = a_n \end{array} \right.$$

3. Deux cercles tangents O et O' sont inscrits dans un demi-cercle C . Trouver le rayon du demi-cercle C, si le rayon de O est 1 et si le rayon de O' est 2 .

SOLUTIONNAIRE

PARTIE A

1. (1) Considérons le développement de $(1 + X)^{2n}$: le coefficient de X^n est $\binom{2n}{n}$

(2) Considérons le produit $(1 + X)^n \cdot (1 + X)^n$: pour obtenir le coefficient de X^n de ce produit, il faut considérer tous les produits dont la somme des exposants de X est n. Nous aurons ainsi:

$$\binom{n}{o} X^o \cdot \binom{n}{n} X^n + \binom{n}{1} X^1 \cdot \binom{n}{n-1} X^{n-1} + \dots\dots\dots\dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} X^{n-1} \cdot \binom{n}{1} X^1 + \binom{n}{n} X^n \cdot \binom{n}{o} X^o$$

ce qui est équivalent à

$$\binom{n}{o}^2 X^n + \binom{n}{1}^2 X^n + \dots\dots + \binom{n}{n-1}^2 X^n + \binom{n}{n}^2 X^n$$

(3) Comme les expressions de (1) et (2) sont égales, les coefficients de X^n sont les mêmes dans les deux cas: donc

$$\binom{n}{o}^2 + \dots\dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. On peut poser

$$f(x) = \int_o^x f^1(t)dt + C$$

et alors

$$f(-x) = \int_o^{-x} f^1(t)dt + C.$$

Mais, puisque $f^1(x) = f^1(-x)$ pour tout x,

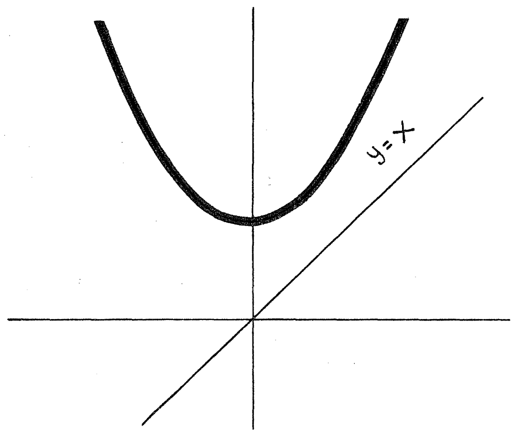
on a $$\int_o^{-x} f^1(t)dt = \int_x^o f^1(t)dt = -\int_o^x f^1(t)dt.$$

On en tire

$$2f(x) = f(x) + f(-x) = \int_o^x f^1(t)dt + C - \int_o^x f^1(t)dt + C = 2C$$

$$\text{donc, } f(x) = C$$

3. $\sqrt{1 + x^2} > x$ pour tout x



PARTIE B

1. Posons n comme base de système de numération dans lequel l'équation

$$5X^2 - 50X + 125 = 0 \qquad (*).$$

est écrite.

Cette équation, traduite en base 10, devient

$$5X^2 - 5nX + n^2 + 2n + 5 = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} 13 &= 5 + 8 \\ &= \text{somme des racines de l'équation} \\ &= \frac{-b}{a} \\ &= \frac{-(-5n)}{5} = n. \end{aligned}$$

La base est donc B.

2. Prouvons le résultat par l'absurde.
Supposons que le nombre soit la somme de deux carrés. Si les deux carrés sont pairs c'est absurde. Si les deux carrés sont impairs, leur somme est paire et c'est encore absurde. Si l'un des carrés est pair et l'autre est impair, alors on a une équation de la forme

$$(2m)^2 + (2n+1)^2 = 11111111111$$

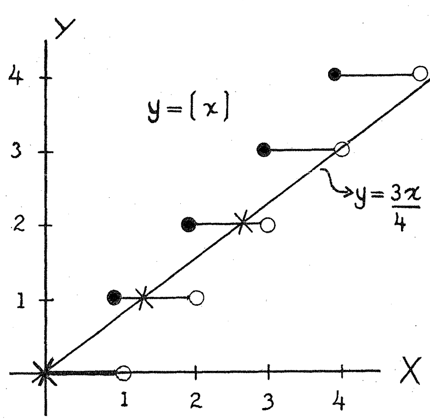
donc $4m^2 + 4n^2 + 4n + 1 = 11111111111$

donc $\left(4\ m^2 + n^2 + n\right) = 11111111110$

d'où 11111111110 est divisible par 4

ce qui est encore absurde.

3. Construisant les graphiques $y = [x]$ et $y = \frac{3x}{4}$ on trouve les 3 solutions suivantes marquées d'un x



Donc on n'a qu'à résoudre

$$\frac{3x}{4} = 0$$

$$\frac{3x}{4} = 1$$

$$\frac{3x}{4} = 2$$

$\therefore$ $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{3}$

sont les 3 seules solutions.

PARTIE C

1. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2} \qquad \text{(bien connu)}$$

Posant $x = 10^a$ et $y = 10^b$

alors $$\sqrt{10^a . 10^b} \leqslant \frac{10^a + 10^b}{2}$$

ou

$$10^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{10^a + 10^b}{2}$$

Prenant le logarithme des 2 membres on a

$$\frac{a + b}{2} \leqslant \left(\frac{10^a + 10^b}{2}\right)$$

2. Posons $S = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n-1} + x_n$, le système devient

$$S - x_1 = a_1 \ , \ S - x_2 = a_2 \ , \ \ldots \ , \ S - x_n = a_n \ \ldots \quad (1)$$

Additionnant ces équations, on trouve

$$nS - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\therefore \ nS - S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\therefore \ (n-1)S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\therefore \ S = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1}$$

(1) donne

$$x_1 = S - a_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1} - a_1 \ , \ x_2 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1} - a_2, \text{ etc}$$

3. $\overline{MM'} = 2\sqrt{2}$ par Pythagore

Soit r le rayon cherché

Posant $x = \overline{O''M}$.

Alors on a les deux équations:

$$\overline{O''M}^2 = \overline{O''O}^2 - \overline{OM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{O''M'}^2 = \overline{O''O'}^2 - \overline{O'M'}^2$$

$$\therefore \quad x^2 = (r-1)^2 - 1^2 \quad \text{et} \quad (2\sqrt{2} - x)^2 = (r-2)^2 - 2^2$$

Résolvant pour r on a $\boxed{r = 1 + \frac{8}{7}\sqrt{2}}$?