PROBLÈMES ET SOLUTIONS

1. Trois amis Arthur, Benjamin et Charles s'achètent des terrains au bord d'un lac. Les trois terrains sont rectangulaires et de même superficie. Celui d'Arthur est presque carré, la longueur mesurant seulement 8 verges de plus que la largeur. Charles possèdent le terrain le plus oblong, la longueur mesurant 34 verges de plus que la largeur. Enfin la propriété de Benjamin est intermédiaire entre les deux autres, la longueur mesure 28 verges de plus que la largeur. Si toutes les dimensions sont exprimées par un nombre exact de verges, quelles sont les mesures des trois terrains.

   Réponse: Si les 3 terrains ont pour largeurs A, B, C, on a: $A(A + 8) = B(B + 28) = C(C + 34)$.

   La première équation a pour solution entière $A = 8$, $B = 4$ et $A = 40$, $B = 32$. Cette dernière solution satisfait la deuxième équation donnant $C = 30$. Les terrains mesurent donc 40×48, 30×60 et 30×60 avec 1920 verges carrées de surface.

2. Dr. C. Dupont, mathématicien célèbre, demande chez un quincailler le prix de certains articles. Le vendeur répond: "Pour un cela fera 10 cents, pour huit ce sera 10 cents, pour dix-sept ce sera 20 cents, pour cent quatre 30 cents, pour sept cent cinquante-six encore 30 cents et pour mille soixante-douze ce sera 40 cents.

   Qu'est-ce que Dr. C. Dupont achète ?

   Réponse: Dr. C. Dupont achète des numéros pour portes, barrières, etc...

3. Dans un groupe de 1,000 couples, on fait les remarques suivantes: les 2/3 des maris qui sont plus grands que leurs épouses sont aussi plus lourds et 3/4 des maris qui sont plus lourds que leurs épouses sont aussi plus grands. Si 120 épouses sont à la fois plus lourdes et plus grandes que leurs maris, combien de maris sont plus lourds et plus grands que leurs épouses.

   Réponse: 480.

4. Trouver le terme manquant dans la suite:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, ... , 100, 121, 10,000.

Réponse: 31. Les termes de cette suite sont les représentations du nombre 16 dans différentes bases, depuis la base 16 jusqu'à la base 2.

5. Sur une rue, il y a 5 maisons, numérotées de la gauche vers la droite; il y a 5 couleurs, 5 voitures, 5 nationalités, 5 animaux, 5 breuvages, tels que :

1 - 5 maisons sur une même rue du même côté.

2 - L'Anglais demeure dans la maison rouge.

3 - L'Espagnol a un chien.

4 - Dans la maison verte, on boit du café.

5 - L'Ukrainien boit du thé.

6 - La maison verte est immédiatement à la droite de la maison ivoire.

7 - Le propriétaire de la "Corvette" garde des limaces.

8 - La "Corvair" appartient aux locataires de la maison jaune.

9 - Le Norvégien demeure dans la lère maison.

10 - Le propriétaire de la "Cadillac" demeure voisin du propriétaire du renard.

11 - Dans la maison du milieu, on boit du lait.

12 - La "Corvair" est à la maison voisine de celle où l'on a un cheval.

13 - Celui qui possède le "Ford" boit du jus d'orange.

14 - Le Canadien est propriétaire d'une "Chevelle".

15 - Le Norvégien demeure voisin de la maison bleue.

Faites la séparation en 5 ensembles disjoints des maisons, des objets, etc... de sorte qu'une maison, qu'une voiture, qu'une couleur, etc. forme 1 ensemble. Trouvez alors qui boit de l'eau, et qui est propriétaire du chat.

Réponse :

Norvégien	Ukrainien	Anglais	Espagnol	Canadien
Jaune	Bleue	Rouge	Ivoire	Verte
<u>Eau</u>	Thé	Lait	Orange	Café
Corvair	Cadillac	Corvette	Ford	Chevelle
Renard	Cheval	Limaces	Chien	<u>Chat</u>

6. Résoudre: $\log_x 3 \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$.

Réponse:

Cette équation est équivalente à

$$\frac{1}{\log_3 x \log_3 \frac{x}{3}} + \frac{1}{\log_3 \frac{x}{81}} = 0$$ (avec les restrictions usuelles à retenir)

i.e. $(\log_3 x) - 4 + \log_3^2 x - \log_3 = 0$. D'où $\log_3 x = \pm 2$

et $x = 3^{\pm 2}$ i.e. $x = 9$ ou $1/9$.

7. Résoudre: $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1$.

Réponse:

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(2 \sin^2 \tfrac{x}{2})^2 + (2 \cos^2 \tfrac{x}{2})^2 = 4,$$

i.e. $$(1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2 = 4,$$

i.e. $$\cos^2 x = 1 \quad \text{d'où } x = K\pi \quad .$$

8. Résoudre: $x^{(x^x)} < (x^x)^x$.

Réponse:

Evidemment $x > 0$ et $x \neq 1$.

Si $x^{(x^x)} < (x^x)^x$ alors $x^x \ln x < x^2 \ln x$ si $x > 1$.

et $x^{(x^x)} < (x^x)^x$ alors $x^x \ln x > x^2 \ln x$ si $x < 1$.

Mais dans les deux cas $x^x < x^2$ et $x < 2$.

Par suite x est solution si et seulement si

$$0 < x < 2 \text{ et } x \neq 1.$$

9. Montrer que:

$$\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N = \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N} .$$

Réponse:

Le membre de gauche peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\log_N a \log_N b} + \frac{1}{\log_N b \log_N c} + \frac{1}{\log_N c \log_N a} = \frac{\log_N c + \log_N a + \log_N b}{\log_N a \log_N b \log_N c} =$$

$$\frac{\log_N abc}{\log_N a \log_N b \log_N c} = \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N} .$$

10. Résoudre: $y^{x^2 - 2x - 3} = 1, \ \log_2 x = y .$

Réponse:

$y^{x^2 - 2x - 3} = 1$ si et seulement si $x^2 - 2x - 3 = 0$ et $y \neq 0$

ou bien $y = 1$.

Si $y = 1$ alors $x = 2$. Dans ces conditions $\log_2 2 = 1$.

Si $x^2 - 2x - 3 = 0$ alors $x = 3$ ou $x = -1$ et $y = \log_2 3$

(si $x = -1$ $y = \log_2 -1$ n'est pas réel).

Les seules solutions sont: $(2,1)$ et $(3,\log_2 3)$.

11. Résoudre:

$$\log_{\sin x}(\sin x - \tfrac{1}{4} \cos x) = 3$$

Réponse:

On doit avoir: $0 < \sin x < 1$ et $\sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0$.

En présence de ces relations, l'équation donnée est équivalente à

$$\sin^3 x = \sin x - \tfrac{1}{4} \cos x$$

ou encore

$$\sin^3 x \cos x = \tfrac{1}{4} \cos x .$$

Bulletin Vol. 7 no. 1 - problème no. 1, page 14.

1 - Soit N un nombre entier positif. Divisé par 43, il donne un reste égal à 3. Divisé par 41, il donne pour reste 2. Enfin, divisé par 37, il donne pour reste 1. Construire une formule donnant tous les nombres sarisfaisant à ces trois conditions simultanées. Trouver le plus petit de ces nombres ainsi que celui d'entre eux qui est le plus près de 1,000,000.

Solution proposée:

Puisque la division de N par 43 donne pour reste 3, N est de la forme:

$N = 43m + 3$, où m est un entier positif. Transformons N de manière à ce que, divisé par 41 il donne pour reste 2:

$N = 41m + (2m+1) + 2$: pour que $(2m + 1)$ soit un multiple de 41, il faut poser $m = 41n + 20$, où n est un entier positif, car alors on obtient:

$$N = 41(41n+20) + (2x41n + 41) + 2 = 43x41n + 41x21 + 2 = N$$

et le reste de la division de N par 41 est 2. Transformons enfin N de façon à ce que, divisé par 37, il donne un reste égal à 1:

$$N = 1763n + 862 + 1$$

$$N = (37x47 + 24)n + 37x23 + 11 + 1$$

$$N = 37x47n + 37x23 + (24n + 11) + 1 .$$

Pour que $(24n + 11)$ soit un multiple de 37, il faut poser $n = 37k - 2$, car alors, on a:

$$N = 37x47(37k - 2) + 37x23 + (24x37k - 37) + 1$$

$$N = 37k(37x47 + 24) - 37(2x47 - 23 + 1) + 1 = \underline{37x41x43k - 37x72 + 1}$$

$\underline{N = 37x1763k - 37x72 + 1}$ et N divisé par 37 donne pour reste 1.

Donc,

A) $\underline{N = 65\ 231\ k - 2\ 663}$ est la formule générale demandée.

B) pour $k = 1$, on obtient le plus petit nombre qui répond simultanément aux trois exigences:

$$N_1 \underline{= 62\ 568} .$$

C) pour $k = 15$, on obtient le nombre le plus près de 1,000,000, soit:

$$N_{15} \underline{= 975\ 802} .$$

(en effet, pour $k = 16$, le nombre obtenu, 1 041 033, est plus éloigné de 1,000,000 que le précédent).

Achille Chevalier, c.s.c.