CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

Concours des Collèges 1964

L'Association Mathématique du Québec en collaboration avec la Société Mathématique du Canada a tenu, le 15 avril 1964, le second Concours mathématique annuel pour les étudiants des collèges. Ce concours est destiné à faire connaître les jeunes étudiants ayant un penchant pour les mathématiques et à faciliter, le cas échéant, la poursuite de leurs études. Cette année, 102 candidats se sont présentés. Voici la liste des bourses et prix décernés.

1. Palmarès.

Bourse offerte conjointement par l'Assurance-Vie Desjardins et La Sauvegarde $250.

Bordelais, Alain	Collège Stanislas, Montréal

Premier prix $100.

Bordelais, Alain	Collège Stanislas, Montréal

Deuxième prix $50.

Tellier, Pierre	Collège Stanislas, Montréal

Prix provinciaux et régionaux $25.

Gaudet, Raymond	Séminaire de Joliette
Jolicoeur, Paul	Séminaire de Québec
Lacasse, Raynald	Collège Mont St-Louis, Montréal
Lachance, Monique	Collège Marguerite-Bourgeoys, Montréal
Lescops, Joelle	Collège Marie de France, Montréal
Létoquart, Bruno	Collège Stanislas, Montréal
Ouellet, Roch	Collège Ste-Anne de la Pocatière
Piffaretti, Jean-Claude	Collège Stanislas, Montréal
Rochon, Jean-François	Collège Ste-Croix, Montréal
Thivierge, Robert	Séminaire St-Joseph, Trois-Rivières

Concours Mathématique du Québec

1964

2. Questionnaire.

Le candidat a trois heures pour résoudre les problèmes. On ne s'attend pas à ce que les concurrents entreprennent la résolution de toutes les questions. L'examen comporte trois parties.

PARTIE A

Les concurrents choisissent deux problèmes

dans chacune des trois parties

1. Soit l'équation $y^2 = x^3$

   a) Construire son graphique.

   b) P étant un point quelconque de cette courbe, on désigne par A la projection de P sur OY, et par B le point où la tangente à la courbe coupe OY.

   Montrer que $\overline{OA} + 2\,\overline{OB} = 0$.

   c) Déduire une méthode de construction de la tangente à la courbe en tout point P.

2. Soient A, B, C les angles d'un triangle. Si $A = B = C = 60^{o}$, on vérifie $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$.

   Montrer que cette propriété est vérifiée seulement si l'un au moins des angles A, B, C, du triangle égale 60^{o}.

3. La base AB d'un triangle est fixe et l'angle opposé C est constant. Trouver le lieu géométrique du point de rencontre des hauteurs.

PARTIE B

Les concurrents choisissent <u>deux</u> problèmes

dans chacune des <u>trois</u> parties

4. Montrer que $5^{2n+2} - 24n - 25$, où n est un entier positif, est divisible par 576.

5. Un hexagone régulier a l'un de ses côtés sur l'axe des x et tous les autres au-dessus de cet axe. Sachant que deux de ses sommets ont les coordonnées respectives (0,0) et (1,0), décrire anatytiquement, par un système d'inéquations, les points qui sont à l'intérieur de cet hexagone.

6. Considérer la fonction

$$y = \frac{x^2 - 6bx + 4a}{4ax^2 - 6bx + 1}$$

où a et b sont les coordonnées d'un point P du plan. Dans quelles régions du plan doit se trouver P pour que la fonction y n'ait ni maximum ni minimum quel que soit x.

PARTIE C

Les concurrents choisissent <u>deux</u> problèmes

dans chacune des <u>trois</u> parties

7. a) Pour quelle valeur de b les nombres suivants:

$$\log_a 2\ , \qquad \log_a (2^b - 1), \qquad \log_a (2^b + 3)$$

forment-ils une progression arithmétique ? a est la base d'un système de logarithme arbitrairement choisie.

b) Pour quelles valeurs de a, la progression arithmétique précédente aura-t-elle une raison positive ?

8. Appelons partition à k termes d'un entier naturel $n (n > 0)$ toute expression de n sous la forme

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont encore des entiers naturels. Combien n admet-il de partitions à k termes ?

9. a) Résoudre algébriquement l'inéquation

$$2 - 3x + \sqrt{4 + 4x - 3x^2} > 0.$$

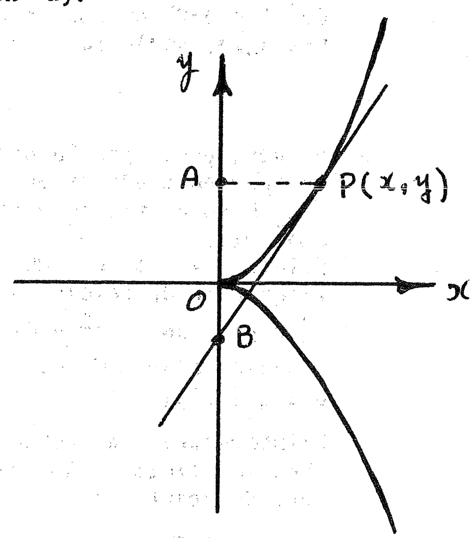
b) Représenter sur les mêmes axes de coordonnées les fonctions

$$y = f_1(x) = \sqrt{4 + 4x - 3x^2}$$

et $y = f_2(x) = 3x - 2$

Retrouver ainsi les solutions obtenues en a).

3. Solutionnaire.



1. a) Voir figure ci-contre.

b) $y = \pm \sqrt{x^3} = \pm x^{3/2}$ où $x > 0$.

Considérons $y = + x^{3/2}$:

Alors $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

$y' = 0$ pour $x = 0$ et $y' > 0$ pour $x > 0$.

Equation de la tangente en $P(x,y)$:

$$Y - y = y'(X - x).$$

Pour $X = 0$, $Y - y = -y'x$

i.e. $Y = \overline{OB} = y - xy' = y - \frac{3}{2} x^{3/2} = y - \frac{3}{2} y = - \frac{y}{2}$

$$- \overline{OA} + 2\, \overline{OB} = y + 2\left(- \frac{y}{2}\right) = 0.$$

c) De P, on mène une perpendiculaire à l'axe des y en A; de A, on déduit B et on joint PB.

2. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 2 \sin \frac{3(A+B)}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} + 2 \sin \frac{3C}{2} \cos \frac{3C}{2}$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 2 \sin \frac{3(180^0 - C)}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} + $$

$$+ 2 \sin \frac{3(180^0 - [A+B])}{2} \cos \frac{3C}{2}$$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -2\cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} - 2 \cos \frac{3(A+B)}{2} \cos \frac{3C}{2}$$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -2\cos \frac{3C}{2} \left[\cos \frac{3(A-B)}{2} + \cos \frac{3(A+B)}{2}\right]$$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3A}{2} = 0 .$$

Mise sous cette forme, on voit facilement que l'équation initiale est vérifiée seulement si l'un des 3 angles A, B ou C admet pour mesure $60^o + K\ 360^o$ ou $180^o + K\ 360^o$. Or A, B et C étant les angles d'un triangle, seule la mesure de 60^o est acceptable.

3. Prenons pour axes la base AB et une perpendiculaire en son milieu. Soit D le centre du cercle circonscrit.
Soient $OA = a$ et $OD = d$.
L'équation du cercle est:

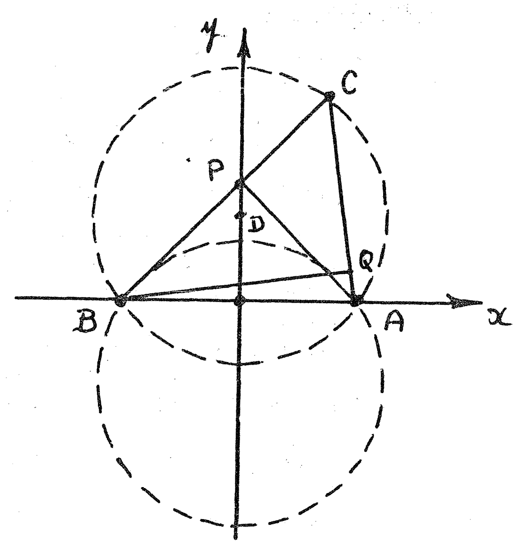
$$x^2 + y^2 - 2dy - a^2 = 0 \qquad (1)$$

L'équation de AC est:

$$y = m(x - a) \qquad (2)$$

L'intersection de cette droite AC avec le cercle donne des coordonnées du point C:

$$x = \frac{am^2 + 2dm - a}{1 + m^2} , \quad y = \frac{2m(dm-a)}{1 + m^2}$$



L'équation de BC, passant par les deux points $B(-a,0)$ et C, est:

$$y\,(am + d) - x(dm - a) - a(dm - a) = 0 \quad .$$

Le coefficient angulaire de BC est: $\dfrac{dm - a}{am + d}$.

La perpendiculaire menée de A sur BC a pour équation:

$$dx - ay - ad = m(a^2 - ax - dy).$$

La perpendiculaire menée de B sur AC, dont le coefficient angulaire est m, sera: $my = -(a + x)$. Eliminons m entre les équations de ces deux hauteurs AP et BQ: il vient

$$x^2 + y^2 + 2dy - a^2 = 0 \quad .$$

Le lieu est un cercle dont le centre a pour coordonnées $(0, -d)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + d^2}$. Ce cercle passe en A et B, car son équation est satisfaite par les coordonnées de ces points.

4. $5^{2n+2} - 24n - 25 = 25^{n+1} - 24n - 25$

$$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25\,(1 + 24)^n - 24n - 25$$

$$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25\,[1 + n\,24 + \frac{n(n-1)}{2.1}\,24^2 + \ldots] - 24n - 25$$

$$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25 + 25\,n\,24 + M\,(24^2) - 24n - 25$$

$$5^{2n+2} - 24n - 25 = 576n + M\,(576)$$

$$5^{2n+2} - 24n - 25 = M\,(576) \;.$$

5. Les équations des côtés AB, BC, DE, EO et DC sont respectivement:

$$y = \sqrt{3}\,(x - 1),\; y = -\sqrt{3}\,(x - 2)$$

$$y = \sqrt{3}\,(x + 1),\; y = -\sqrt{3}\,x$$

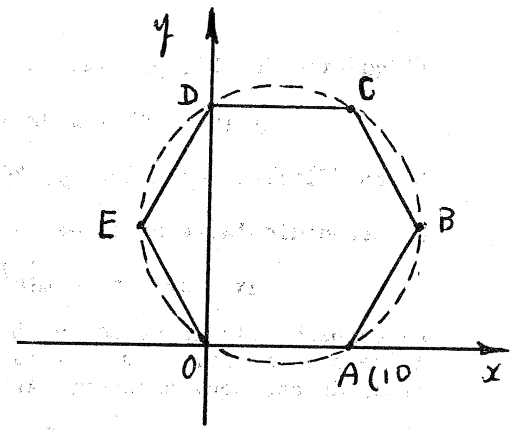
et $y = \sqrt{3}$.

Les points $P(x,y)$ situés à l'intérieur de l'hexagone doivent avoir des coordonnées qui vérifient les relations suivantes:

$y > 0$, $y < \sqrt{3}$, $y > \sqrt{3}(x-1)$,

$y < \sqrt{3}\,(x+1)$, $y < -\sqrt{3}(x-2)$

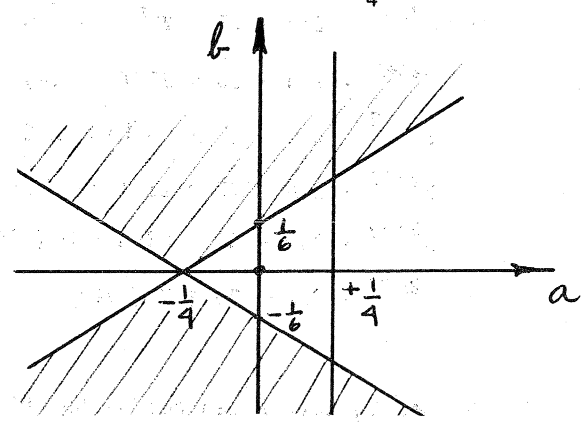
et $y > -x\sqrt{3}$.



6. Soit $y = \dfrac{x^2 - 6bx + 4a}{4ax^2 - 6bx + 1}$. Alors $y' = \dfrac{(4a-1)\,[6bx^2 - 2(4a\ 1)x + 6b]}{(4ax^2 - 6bx + 1)^2}$.

Cette dérivée est différente de zéro pour tout x si $a \neq \frac{1}{4}$ et si $(4a - 6b + 1)\,(4a + 6b + 1) < 0$.

Les points des régions hachurées qui n'appartiennent pas à la droite $a = \frac{1}{4}$, sont des points pour lesquels la fonction considérée n'admet ni minimum ni maximum quel que s soit x .



7. Les nombres $\log_a 2$, $\log_a (2^b - 1)$ et $\log_a (2^b + 3)$ forment une progression arithmétique de raison positive si et seulement si

$$\log_a \left(\frac{2^b-1}{2}\right) = \log_a \left(\frac{2^b+3}{2^b-1}\right) > 0$$

a) L'égalité est vérifiée quelle que soit la base seulement si

$$\frac{2^b - 1}{2} = \frac{2^b + 3}{2^b - 1} \quad \text{i.e.} \quad (2^b - 5)(2^b + 1) = 0$$

La seule racine réelle de cette équation est: $b = \log_2 5$.

L'équation de BC, passant par les deux points $B(-a,0)$ et C, est:

$$y\,(am + d) - x(dm - a) - a(dm - a) = 0 \quad .$$

Le coefficient angulaire de BC est: $\dfrac{dm - a}{am + d}$.

La perpendiculaire menée de A sur BC a pour équation:

$$dx - ay - ad = m(a^2 - ax - dy).$$

La perpendiculaire menée de B sur AC, dont le coefficient angulaire est m, sera: $my = -\,(a + x)$. Eliminons m entre les équations de ces deux hauteurs AP et BQ: il vient

$$x^2 + y^2 + 2dy - a^2 = 0 \quad .$$

Le lieu est un cercle dont le centre a pour coordonnées $(0, -d)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + d^2}$. Ce cercle passe en A et B, car son équation est satisfaite par les coordonnées de ces points.

4. $5^{2n+2} - 24n - 25 = 25^{n+1} - 24n - 25$

$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25\;(1 + 24)^n - 24n - 25$

$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25\;[1 + n\;24 + \dfrac{n(n-1)}{2.1}\;24^2 + \ldots] - 24n - 25$

$5^{2n+2} - 24n - 25 = 25 + 25\;n\;24 + M\;(24^2) - 24n - 25$

$5^{2n+2} - 24n - 25 = 576n + M\;(576)$

$5^{2n+2} - 24n - 25 = M\;(576)$.

5. Les équations des côtés AB, BC, DE, EO et DC sont respectivement:

$$y = \sqrt{3}\,(x - 1),\; y = -\sqrt{3}\,(x - 2)$$

$$y = \sqrt{3}\,(x + 1),\; y = -\sqrt{3}\,x$$

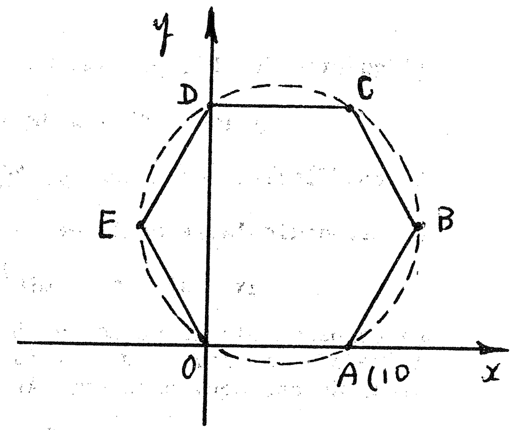
$$\text{et} \quad y = \sqrt{3}\,.$$

Les points $P(x,y)$ situés à l'intérieur de l'hexagone doivent avoir des coordonnées qui vérifient les relations suivantes:

$y > 0$, $y < \sqrt{3}$, $y > \sqrt{3}(x-1)$,

$y < \sqrt{3}\,(x + 1)$, $y < -\sqrt{3}(x-2)$

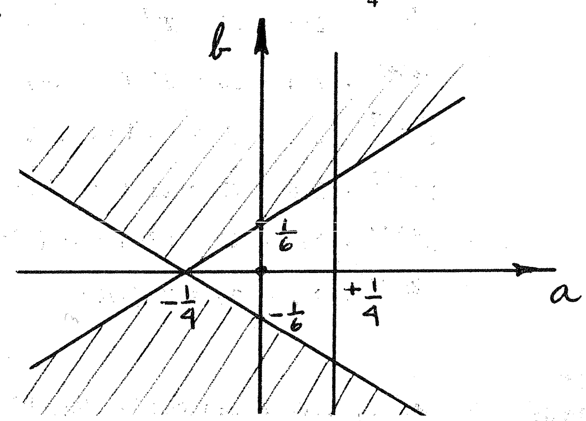
et $y > -x\sqrt{3}$.



6. Soit $y = \dfrac{x^2 - 6bx + 4a}{4ax^2 - 6bx + 1}$. Alors $y' = \dfrac{(4a-1)\,[6bx^2 - 2(4a\;1)x + 6b]}{(4ax^2 - 6bx + 1)^2}$.

Cette dérivée est différente de zéro pour tout x si $a \neq \frac{1}{4}$ et si $(4a - 6b + 1)\,(4a + 6b + 1) < 0$.

Les points des régions hachurées qui n'appartiennent pas à la droite $a = \frac{1}{4}$, sont des points pour lesquels la fonction considérée n'admet ni minimum ni maximum quel que s soit x .



7. Les nombres $\log_a 2$, $\log_a (2^b - 1)$ et $\log_a (2^b + 3)$ forment une progression arithmétique de raison positive si et seulement si

$$\log_a \left(\frac{2^b-1}{2}\right) = \log_a \left(\frac{2^b+3}{2^b-1}\right) > 0$$

a) L'égalité est vérifiée quelle que soit la base seulement si

$$\frac{2^b - 1}{2} = \frac{2^b + 3}{2^b - 1} \quad \text{i.e.} \quad (2^b - 5)(2^b + 1) = 0$$

La seule racine réelle de cette équation est: $b = \log_2 5$.

b) L'inégalité est vérifiée seulement si $a > 1$ puisque $\frac{2^b + 3}{2^b - 1} > 1$ quelle que soit la valeur de b.

8. n peut s'écrire sous la forme:

$$n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \qquad (n \text{ fois}).$$

Il y a $(n - 1)$ endroits où une partition peut être faite. Pour effectuer K partitions, il suffit d'insérer $(K - 1)$ barres de partition et il y a $\binom{n-1}{K-1}$ façons de le faire: ceci fait donc $\binom{n-1}{K-1}$ partitions possibles. Observons que $1 + 2$ et $2 + 1$ sont des partitions différentes dans le cas où $n = 3$ et $K = 2$.

9. a) Il faut que:

$$4 + 4x - 3x^2 > 0$$
$$-(3x^2 - 4x + 4) > 0$$
$$3x^2 - 4x + 4 < 0$$
$$(3x + 2)(x - 2) < 0$$
$$\text{i.e.} \quad -\frac{2}{3} < x < 2 \qquad (1)$$

On doit résoudre $\sqrt{4 + 4x - 3x^2} > 3x - 2$ avec la condition (1). Tout x tel que $3x - 2 < 0$ est solution si compatible avec (1).

$$\text{i.e.} \quad -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} \qquad (2)$$

Si $3x - 2 > 0$, on élève au carré:

$$4 + 4x - 3x^2 > (3x - 2)^2$$
$$4 + 4x - 3x^2 > 9x^2 - 12x + 4$$
$$-12x^2 + 16x > 0$$
$$4x\,(3x - 4) < 0$$
$$\text{i.e.} \quad 0 < x < \frac{4}{3} \qquad (3)$$
$$(2) \text{ et } (3) \qquad -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}\ .$$

4. Rapport et analyse statistique des résultats.

La préparation du questionnaire a été faite par un comité groupant des professeurs des Universités Laval, Montréal et Sherbrooke. Cette préparation a fait l'objet de soins particuliers, les programmes des collèges éligibles (i.e. les collèges affiliés, à l'Université Laval, les collèges affiliés à l'Université de Montréal, les collèges affiliés à l'Université de Sherbrooke et les collèges français) n'étant pas tous identiques. Nous espérons que, sous l'impulsion du Ministère de l'Education, les programmes seront, dans un avenir prochain, plus près les uns des autres.

Il est bon de remarquer que les questions, tout en étant sérieuses, ne supposaient que la connaissance des propriétés fondamentales des fonctions élémentaires. Aucune question ne demandait l'usage du calcul intégral. Quant à la dérivée, il suffisait de savoir trouver celle d'une fonction rationnelle.

Les tableaux qui suivent donnent les résultats obtenus par question et par groupe. Les groupes sont constitués des candidats des collèges affiliés à l'une ou l'autre des universités québecoises, garçons ou filles. Les collèges affiliés à l'Université de Montréal ayant présenté plus de candidats que les autres, nous avons crû bon de distinguer les collèges situés sur l'île de Montréal et les autres. On observe que seuls les collèges féminins situés sur l'île de Montréal ont présenté des candidates; on remarque également que les collèges affiliés à l'Université de Sherbrooke n'en ont présenté aucun.

Les résultats qui suivent n'ont aucunement pour but de montrer que certains groupes de collèges ont obtenu de meilleurs résultats que d'autres. Rappelons que les programmes sont assez différents et que le nombre des candidats est peu élevé. Le but du concours est, rappelons-le, de décider, à l'échelle de la province, les étudiants ayant un penchant marqué pour les mathématiques. Il reste qu'une analyse détaillée par question et par groupe peut éventuellement aider à mieux orienter et à améliorer davantage certains aspects de l'enseignement des mathématiques. Le problème no. 2 comportait une erreur dont on a tenu compte lors de la correction: aussi ne sera-t-il point question de ce problème dans les tableaux qui suivront.

Nous comptons que les collèges continueront de s'intéresser au concours; peut-être pourraient-ils, par l'organisation de clubs de mathématiques, par exemple, encourager leurs meilleurs étudiants à approfondir les mathématiques au niveau préuniversitaire.

Tableau I

Problèmes complètement réussis

Groupe	Description du groupe	1	3	4	5	6	7	8	9	Totaux
A	Collèges affiliés à l'Université Laval: 8 collèges, 36 garçons	0	0	1	0	0	3	0	0	4
	Collèges affiliés à l'Université de Montréal:									
B	Ile: 7 collèges, 32 garçons	7	0	6	8	0	2	0	1	24
C	Ile: 2 collèges, 7 filles	1	0	1	0	0	0	0	0	2
D	Hors de l'île: 4 collèges, 18 garçons	3	0	0	0	0	1	0	0	4
	Enseignement français									
E	2 collèges: 8 garçons, 1 fille	4	6	0	5	1	1	0	2	19
TOTAUX		15	6	8	13	1	7	0	3	53

Tableau II

Note moyenne par question et par groupe

Groupes	PROBLEMES							
	1	3	4	5	6	7	8	9
A*	4.4	1.8	0.6	1.3	0.9	2.7	0	2.2
B	6.6	2.4	3.7	5.4	1.6	3.0	0.1	2.0
C	6.0	0.7	2.4	1.0	2.0	1.3	0	3.7
D	5.6	1.0	1.1	2.8	0.3	1.4	0	1.2
E	9.6	8.7	—**	9.1	4.6	5.7	0	6.9
TOTAUX	6.0	3.3	2.0	4.3	1.7	2.7	0.0	2.4

* Pour la description des groupes, se référer au tableau I.

** Aucun candidat n'a tenté de résoudre ce problème.

Jacques Martin et Jean Ménard