QUELQUES PARADOXES MATHÉMATIQUES

lère partie

La mathématique est une science simple en ce qu'elle s'occupe des problèmes de déduction à partir de définitions et de propositions fondamentales (axiomes) et qu'elle ne se préoccupe pas de la relation entre les propositions déduites et la réalité. Les propositions qu'elles considèrent sont soit vraies, soit fausses; on exclut les propositions douteuses, probables et tout ce qui pourrait compliquer la logique. Le vocabulaire utilisé est restreint et précis. Les êtres dont elle s'occupe ont les propriétés qu'on veut bien leur conférer et elle n'a aucune prétention en ce qui concerne la philosophie de la nature.

Ce qui, jusqu'à un certain point, caractérise la mathématique, c'est qu'à partir de quelques propositions fondamentales, elle construit une suite impressionnante de déductions que l'on appelle théorèmes.

Les problèmes dont s'occupe la mathématique sont relativement simples; mais pour simples qu'elles soient les langues naturelles et en particulier le français ne parviennent que péniblement à les exprimer; c'est que le mathématicien a besoin d'une langue idéographique et que le français est une langue syllabique. Pour pallier aux lourdeurs de la langue, le mathématicien lui adjoint un symbolisme particulier; on peut même dire que la résolution d'un problème mathématique dépend dans une mesure très appréciable de la flexibilité des signes utilisés. On doit donc s'entourer de précautions quant à l'emploi correct de la langue, de la logique et du support intuitif. Nous voulons montrer à l'aide d'exemples convenablement choisis les difficultés que l'on peut rencontrer par manque de précautions suffisantes.

Soulignons en premier lieu que le mathématicien tolère et fait couramment usage d'"abus de langage". Ainsi on parlera d'un triangle dont la somme des "côtés" est égale à 12, au lieu de parler d'un triangle dont la somme des "longueurs des côtés" est égale à 12. On parlera également de l'angle formé par deux droites quand on sait fort bien que deux droites concourantes déterminent plusieurs angles. D'une façon générale, on fait un abus de langage chaque fois qu'une expression est employée dans un sens impropre pour éviter une périphrase ou une description longue. Les abus de langage sont permis mais il est essentiel d'en connaître exactement le sens. (Il arrive fréquemment en géométrie que l'on abuse des abus de langage. En voici un exemple: "la distance la plus courte d'un point à une droite est la perpendiculaire" alors que la distance est un nombre et la perpendiculaire est une droite; dans ce cas, ce n'est pas un abus de langage mais une faute).

APPLICATIONS FAUTIVES DE THEOREMES.

Exemple 1. $1 = 2$.

Soit $a = b$. Alors $ab = a^2$ et par suite $ab - b^2 = a^2 - b^2$. Mais cette dernière relation peut s'écrire sous la forme

$$(a - b)b = (a - b)(a + b)$$

d'où

$$b = a + b$$

Si $a = b = 1$ alors $1 = 2$.

Exemple 2. $x^2 < 0$.

Soit $a < b$. Alors

$$a(a - b) < b(a - b).$$

En appliquant la loi de distributivité, on obtient

$$a^2 - ab < ab - b^2$$

c'est-à-dire

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

ou encore

$$(a - b)^2 < 0 \quad .$$

Exemple 3. Dans un triangle tous les angles sont égaux.

Soit le triangle ABC (fig. 1).

Le côté BA est prolongé en D tel que AD = AC = b. Le côté CA est prolongé en E tel que AE = AB = c.

En appliquant la "loi des sinus" aux triangles BCD et BEC on obtient respectivement

$$\frac{b + c}{\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \text{et}$$

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}$$

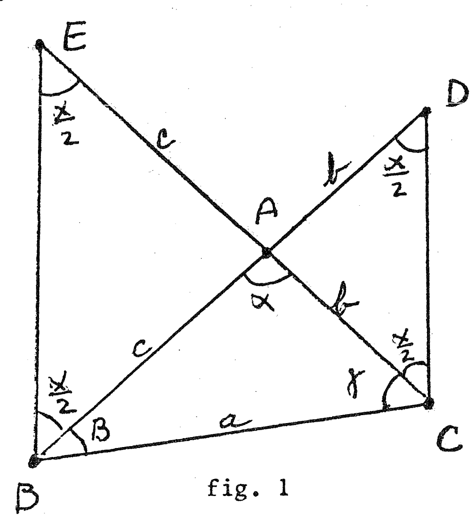


fig. 1

Par suite

$$\frac{b + c}{\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})} = \frac{b + c}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})} \quad ,$$

$$\sin(\gamma + \tfrac{\alpha}{2}) = \sin(\beta + \tfrac{\alpha}{2}) \quad ,$$

et finalement

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$$

d'où $\gamma = \beta$

Exemple 4. $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

On a $\log \sin \frac{\pi}{6} = \log \sin \frac{\pi}{6}$, d'où $2 \log \sin \frac{\pi}{6} > \log \sin \frac{\pi}{6}$ et par suite $\log(\sin \frac{\pi}{6})^2 > \log(\sin \frac{\pi}{6})$; puisque le logarithme est une fonction croissante, on en tire $(\sin \frac{\pi}{6})^2 > \sin \frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

EXPLICATIONS.

Dans l'exemple 1, la relation $(a - b)b = (a - b)(a + b)$ n'entraîne pas $b = a - b$ parce que $(a - b) = 0$. Dans l'exemple 2, $a < b$ n'entraîne pas $a(a - b) < b(a - b)$ parce que $(a - b) < 0$; il aurait fallu écrire $a < b$ entraîne $a(a - b) > b(a - b)$. Dans l'exemple 3, $\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$ n'entraîne pas $\gamma + \frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$. On sait que $x = y$ entraîne $\sin x = \sin y$ mais non l'inverse; en fait $\sin x = \sin y$ entraîne $x = y + k360^\circ$ ou $x = (180^\circ - y) + k360^\circ$. Dans l'exemple 4, $\log \sin \frac{\pi}{6} = \log \sin \frac{\pi}{6}$ n'entraîne pas que $2(\log \sin \frac{\pi}{6}) > \log(\sin \frac{\pi}{6})$ parce que $\log(\sin \frac{\pi}{6}) < 0$. En effet, les logarithmes à base 10 des nombres entre 0 et 1 $(\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2})$ sont négatifs et $-2 = -2$ n'entraîne pas que $2(-2) > -2$. Tous ces exemples ont quelque chose de commun.

Les contradictions résultent d'applications fautives de théorèmes.

GENERALISATIONS FAUTIVES.

Exemple 5. $-1 = +1$.

En effet,

$$(-1) = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{2}} = +1 = 1.$$

Exemple 6. $4 = 16$.

Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on a

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

En élevant les deux membres à la puissance 3/2, on obtient

$$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{3/2} .$$

En ajoutant 3 aux deux membres et en élevant au carré on obtient finalement

$$(\cos^3 x + 3)^2 = ((1 - \sin^2 x)^{3/2} + 3)^2 .$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ cette relation se réduit à $9 = 9$ et elle est bien vérifiée. Mais si on pose $x = \pi$, on obtient alors

$$4 = 16 .$$

Exemple 7. Pour un entier $N > 1{,}000{,}000$, il est raisonnable de dire que N et N + 1 sont approximativement égaux, en symboles on note $N \simeq N + 1$. En conséquence,

$$\begin{aligned} 1{,}000{,}000 &\simeq 1{,}000{,}001 \\ 1{,}000{,}001 &\simeq 1{,}000{,}002 \\ 1{,}000{,}002 &\simeq 1{,}000{,}003 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 1{,}999{,}999 &\simeq 2{,}000{,}000 \end{aligned}$$

Donc, $1{,}000{,}000 \times 1{,}000{,}001 \times \ldots \times 1{,}999{,}999 \simeq 1{,}000{,}001 \times 1{,}000{,}002 \times \ldots \times 2{,}000{,}000$ d'où en simplifiant les termes semblables: $1{,}000{,}000 \simeq 2{,}000{,}000$.

EXPLICATIONS.

Dans l'exemple 5, on applique les "lois des exposants" (propriétés de la fonction exponentielle) qui ont été étudiées pour a^x où $a > 0$ dans le cas où $a < 0$; de plus on fait un mauvais emploi de l'exposant $\frac{1}{2}$. L'erreur dans l'exemple 6 consiste en un emploi fautif de la racine carrée;

$(\cos^2 x)^{3/2} = \pm \cos^3 x$ suivant les valeurs de x, en particulier si $x = \pi$ au lieu de lire $(\cos^3 x + 3)^2$ il faudrait lire $(-\cos^3 x + 3)^2$.

L'erreur dans l'exemple 7, consiste à appliquer à la relation $\simeq$ les propriétés de l'égalité. Si on peut écrire que $a = b$ et $b = c$ entraîne $a = c$, on ne peut pas écrire que $a \simeq b$ et $b \simeq c$ entraîne que $a \simeq c$. De même la loi de cancellation n'est pas valide pour la relation .

<u>SURPRISES DE L'INFINI.</u>

<u>Exemple 8.</u> un ensemble pour lequel la partie n'est pas plus petite que le tout.

Soit N l'ensemble des entiers naturels.

N = 1, 2, 3, 4, 5, ...

Soit Q l'ensemble des entiers qui sont le carré d'un nombre entier.

Q = 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

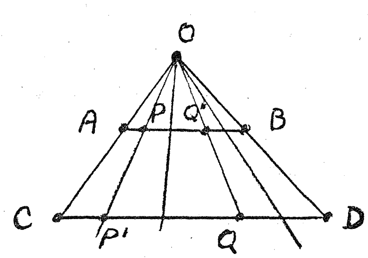
Disposons les éléments des ensembles N et Q de la manière suivante :

Q = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...
N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble Q ? On peut le lire sur la ligne du bas. Il y en a "autant".

<u>Exemple 9.</u> un segment de droite contient autant de points qu'un segment de droite de longueur double.

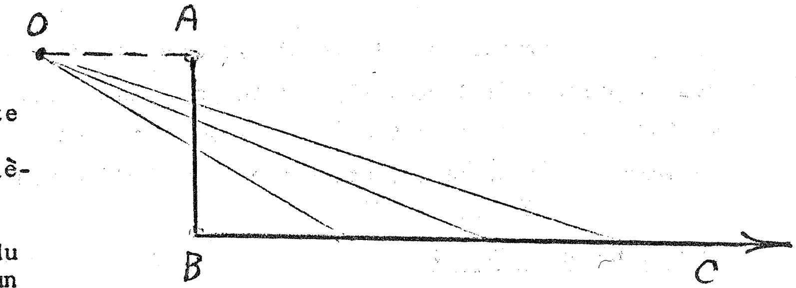
On peut supposer que AB et CD sont parallèles et que CD = 2. AB. Les droites AC et BD se coupent en un point O.



1) A tout point P de AB on fait correspondre l'intersection P' de OP avec CD.

<u>Exemple 10</u>. Il y a autant de points sur un intervalle de longueur un que sur une demi-droite ouverte (i.é. ne contenant pas son extrémité) infinie.

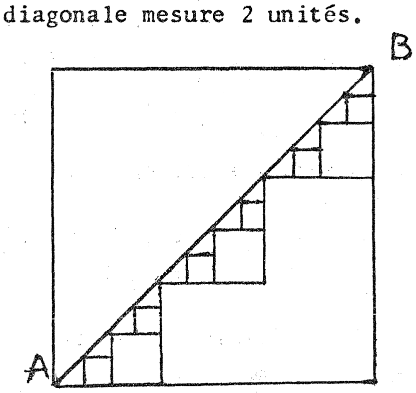
Considérons la figure ci-contre où le segment AB est perpendiculaire à la demi-droite BC d'extrémité B et où la droite OA est parallèle à la demi-droite BC.



A chacun des points P du segment AB correspond un et un seul point P' de la demi-droite BC et réciproquement. Les éléments de ces deux ensembles de points (segment AB et demi-droite BC) pouvant être mis en correspondance biunivoque, il y a "autant" d'éléments dans l'un que dans l'autre.

<u>Exemple 11</u>. Dans un carré de côté unité, une diagonale mesure 2 unités.

Soit AB une diagonale d'un tel carré. Considérons un chemin en zig-zag formé de segments parallèles aux côtés allant de A à B comme l'indique la figure. La longueur d'un tel chemin est sûrement égale à deux unités. Si on fait les zigzags de plus en plus petits, on se rapproche de plus en plus de la diagonale AB; donc la diagonale a pour longueur 2.



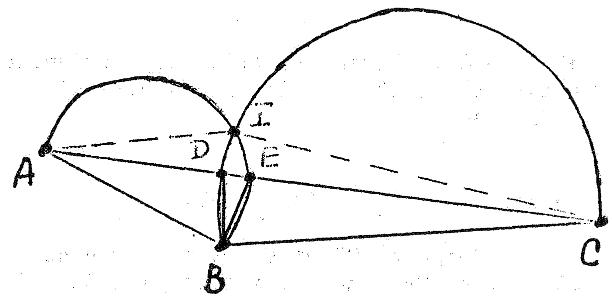
<u>EXPLICATIONS</u>.

Les exemples 8, 9, 10 et 11 ont ceci de commun: ils font intervenir l'infini. 8, 9 et 10 illustrent le fait que l'on ne peut pas appliquer intégralement les propriétés des ensembles finis aux ensembles infinis. Un traitement plus détaillé des problèmes soulevés par 8, 9 et 10 justifierait les conclusions obtenues. Mais l'exemple 11 souligne le danger de généraliser du fini à l'infini sans précaution.

<u>ABUS DE FIGURES</u>.

<u>Exemple 12</u>. Par un point pris hors d'une droite on peut mener deux perpendiculaires à cette droite.

Soient A, B, C trois points non colinéaires. Construisons tel qu'indiqué sur la figure ci-contre deux demi-cercles, l'un de diamètre AB et l'autre de diamètre BC. Ces deux demi-cercles se coupent en I. Le segment AC rencontre les demi-cercles en D et en E. Les angles AEB et CDB sont droits parce que les triangles AEB et CDB sont inscrits dans un cercle que les côtés AB et BC passent par les centres respectifs des cercles.



Par suite BD et BE sont deux perpendiculaires distinctes de B à AC.

<u>Exemple 13</u>. Tous les angles sont droits.

Soit ABCD un rectangle. On fait tourner le côté CB pour l'amener en CB' (fig. 6). On construit les médiatrices OE et OE' des segments AB et AB' respectivement, et on trace les segments OD, OA, OB' et OC.

Les triangles ODA et OB'C sont égaux parce que OD = OC (OF est perpendiculaire à DC et DF = FC), AD = CB (par construction) et AO = B'O (OE' est perpendiculaire à AB' et AE' = E'B'). Par suite les angles ODA et OCB' sont égaux. D'autre part, on voit facilement que les triangles ODF et OCF sont égaux, que ODC = OCF et finalement, l'angle droit ADF est égal à l'angle FCB'.

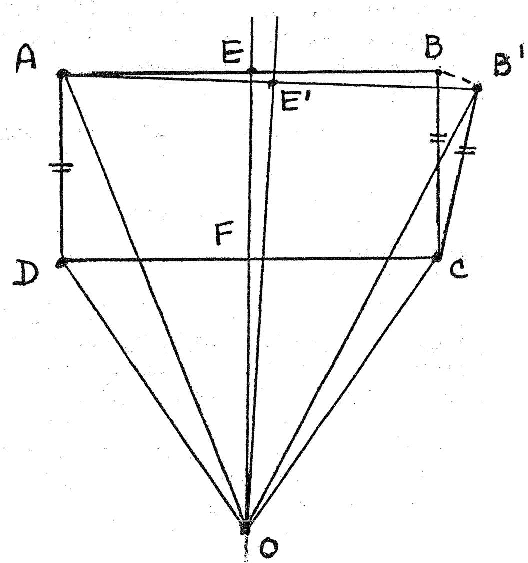


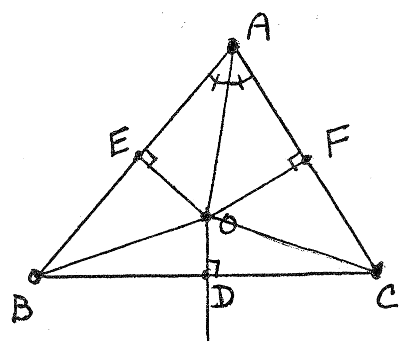
fig. 6

<u>Exemple 14</u>. Tous les triangles sont isocèles.

Soit ABC un triangle; on peut supposer que la bissectrice de l'angle A et la médiatrice du côté BC se coupent en un point O (sinon la bissectrice serait parallèle à la médiatrice et devrait coincider avec elle et le triangle ABC serait déjà isocèle). Il y a deux cas : ou bien O est à l'intérieur du triangle ABC ou bien il est à l'extérieur.

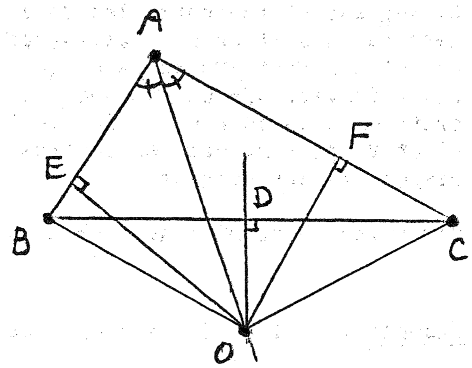
1er cas : O est à l'intérieur.

Soit OD la médiatrice de BC. Joignons OB et OC; les triangles OBD et ODC sont égaux (un angle entre 2 côtés d'où OB = OC. Par O menons OE ⊥ AB et OF ⊥ AC; les triangles rectangles AEO et OAF sont égaux (l'hypoténuse et un angle aigu); d'où AE = AF



et EO = OF. Enfin les triangles rectangles OEB et OFC sont égaux (l'hypoténuse et un côté de l'angle droit) d'où EB = FC. Donc AB = AE + EB = AF + + FC = AC.

2e cas : O est à l'extérieur.



Joignons OB et OC et de O menons OE ⊥ AB et OF ⊥ AC. Les triangles OBD et ODC sont égaux (un angle entre 2 côtés) d'où OB = OC. Les triangles rectangles AEO et OAF sont égaux (l'hypoténuse et un angle aigu) d'où AE = AF et EO = OF. Enfin, les triangles rectangles OEB et OFC sont égaux (l'hypoténuse et un côté de l'angle droit) d'où EB = FC. Donc
AB = AE + EB = AF + FC = AC.

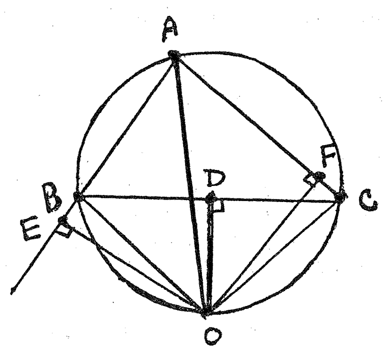
Donc dans tous les cas ABC est isocèle.

c.q.f.d.

<u>EXPLICATIONS.</u>

Dans l'exemple 12, la figure a été déformée légèrement de façon à ce que les trois points A, I et C ne soient pas colinéaires. En fait, les points D, E et I coincident. Dans l'exemple 13, le point O sur la figure devrait être plus bas de telle sorte que la droite OB' devrait passer à droite du point C plutôt qu'à gauche. Dans ces conditions, les triangles ODA et OB'C sont bien égaux mais on ne peut pas soustraire les angles égaux ODF et OCF des angles égaux ODA et OCB'; DF appartient bien à l'intérieur de l'angle ODA mais CF n'appartient pas à l'intérieur de l'angle OCB'.

Dans l'exemple 14, la seule chose fausse est la figure: O ne peut jamais être à l'intérieur du triangle (il est sur le cercle circonscrit du triangle); d'autre part, E et F ne sont jamais simultanément à l'intérieur, l'un de AB et l'autre de AC : si l'un (e.g. F) est à l'intérieur (e.g. de AC) l'autre est sur le prolongement (e.g. E est un prolongement de AB). En réalité on a :
AB = AE - BE = AF - FC et AC = AF + FC.



CONCLUSION.

Précisons d'abord qu'un paradoxe résulte d'une conclusion surprenante. Si cette conclusion est erronnée en ce sens que la déduction est fautive, on dit alors que c'est un sophisme. Dans certains cas la conclusion, à première vue surprenante, doit être admise pour vraie. Dans ce qui précède, les seuls paradoxes qui ne sont pas des sophismes sont les exemples 8, 9 et 10.

Quant aux sophismes, il est bon de les ranger en deux groupes :

1) les amusements : ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12
2) les sophismes révélateurs d'une difficulté insoupçonnée : ex. 13, 14

La difficulté mise en lumière par les exemples 13 et 14, est l'absence dans le système d'Euclide des axiomes d'ordre, une omission grave.

Les paradoxes précédents peuvent être, à juste titre d'ailleurs, considérés comme un amusement et le nombre des publications dans ce domaine témoigne de l'intérêt qu'ils suscitent.

Cependant les paradoxes ne sont pas qu'un amusement, et s'ils sont employés à bon escient, ils peuvent constituer un excellent outil pédagogique.

Roland Brossard
Marc Venne.