TRISECTION DE L'ANGLE

introduction **Hélène KAYLER**

texte **Yves PIERRE**

Introduction

Dans cet article nous présentons trois constructions géométriques de la droite trisectrice d'un angle.Il s'agit donc d'un problème célèbre.Dans un article (Bulletin 5e. année, no.2) M. P.Y. Leduc, a remarqué que " à peu près toute figure dans le plan, peut être construite, à condition de bien vouloir utiliser les instruments nécessaires".

Les Grecs ont cherché à résoudre ce problème de construction dans un contexte particulier: les seuls instruments permis étaient la règle et le compas,leur usage en étant bien précisé. Dans ce contexte, et dans ce contexte seulement, il a été prouvé que certaines constructions sont impossibles; entre autres la trisection d' un angle est impossible si l'on utilise "légalement" uniquement règle et compas. Bien entendu, si l' on se permet quelque liberté quant à la manipulation de ces instruments, ou quant à l'usage d' autres moyens de tracé géométriques, le verdict "impossible"est aussitôt levé. En particulier voici deux constructions de la droite trisectrice d'un angle.

M. Y. Pierre nous offre la première; c' est un procédé personnel et ingénieux;au cours de sa construction, Y. Pierre utilise "légalement" la règle et le compas mais en plus, il fait une construction, par points, à main levée et c'est là qu'il déroge aux règlements fixés par les Anciens.

Le procédé suivi est très intéressant et son développement très naturel.

La deuxième construction est due à Jully (1911) et était présentée par M. Alexis-Carmes Brunet dans la revue l' Ecole Canadienne (XXVIIIe. Année, no.5 Janvier 1953). La construction est facile; elle utilise règle et compas seulement, mais fait un usage "abusif" de la règle, selon l'optique classique.Nous ajoutons à la construction une preuve.

Enfin, la troisième construction fait le partage d' un angle droit en trois angles égaux ; construction mieux connue, et présentée en particulier dans la revue l' Ecole Canadienne (XXVIII.e. Année no.4, Décembre 1952, par M. Alexis Carmes Brunet)

Ces constructions pourraient servir d'exercice en classe,ou de travail extra-scolaire (par exemple clubs mathématiques); être le point de départ de discussions intéressantes sur les problèmes de construction géométrique vus par les Anciens; récapituler l' étude des lieux géométriques; initier aux constructions par points des coniques.....

Trisection de l'angle

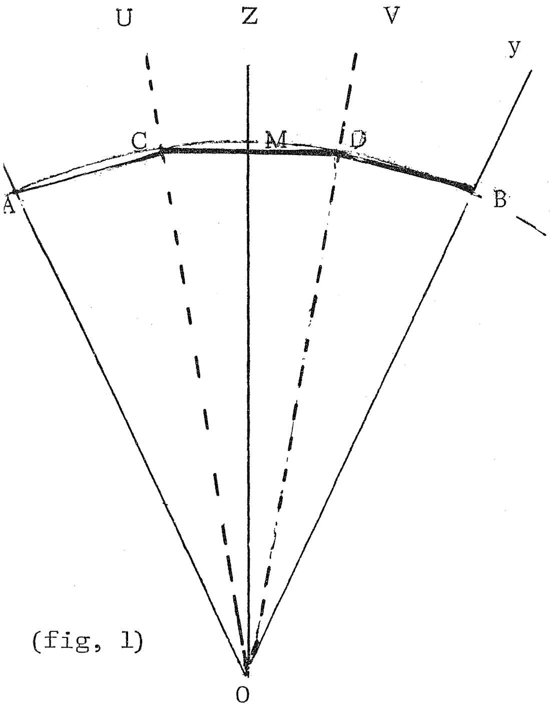
par M. Y. Pierre.

Soit l'Angle X O Y, (fig. 1) que l' on veut diviser en trois angles égaux. De O comme centre,traçons un arc de cercle coupant Ox et Oy en A et B. Le problème revient à déterminer sur A B un point C tel que A O C = 1/3 A O B.

Etudions la figure obtenue.

Supposer le problème résolu.

isection de l'angle



(fig, 1)

.- De O comme centre, traçons un arc
)upant Ox et Oy en A et B.
)ient OZ la bissectrice de l' angle
: OU et OV les droites trisectrices
ii rencontrent l' arc A B respective-
ent en C et D. Joignons A-C, C-D et
-B; C-D coupe OZ en M.

Les cordes AC, CD, et DB sont é-
ales (elles correspondent à des an-
Les égaux par hypothèse) et OZ jouant
e rôle d'axe de symétrie de la figure
)ropriété de la bissectrice d'un an-
Le) il s'ensuit que C M= $\frac{1}{2}$ A C. C M
eprésente la distance du point C à la
oite OZ et A C représente la distan-
e du point C au point A. Il est donc
:abli que la distance du point C à la
oite bissectrice OZ est moitié de la
.stance du point C au point A.

- Réciproquement

Soit A B un arc de cercle de cen-
e O, OZ la bissectrice et C un point
: A B tel que la distance de C à OZ
soit C M) soit égale à la moitié de
ι distance de C à A. A montrer que
divise l'angle X O Y au tiers.

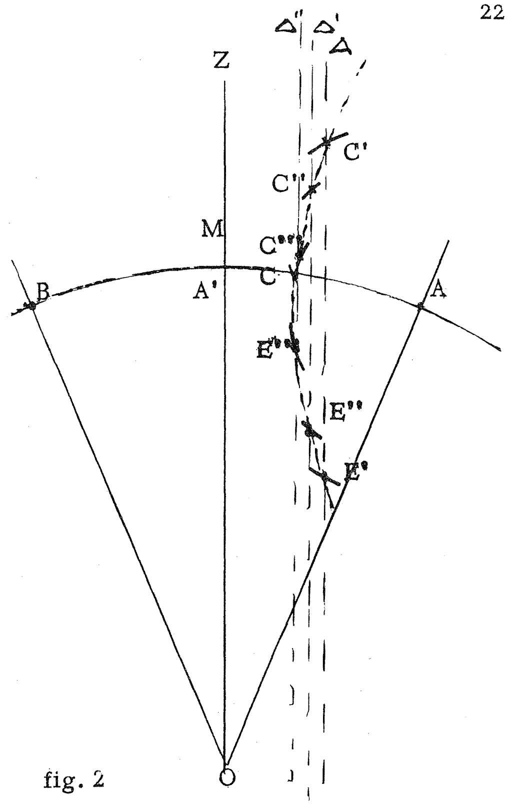


fig. 2

Prolongeons C M jusqu' à son in-
tersection D avec l'arc A B et traçons
B D. Alors B D = D C = C A par hypo-
thèse et par les propriétés de symé-
trie de la figure. Il s'ensuit que les
angles du centre correspondant à ces
cordes égales, sont égaux.

3.- Le problème se ramène donc au sui-
vant: déterminer le lieu L des points
dont la distance à A est le double de
la distance à OZ; C sera à l'intersec-
tion de l'arc AB et du lieu L.

II. Construction de L.

Lieux des points dont la distance
à un point donné A est double de la
distance à une droite fixe OZ (fig. 2)

Soit "a" une distance et Δ la pa-
rallèle à OM située du côté de A, à la
distance "a" de OM. Déterminons la dis-
tance 2a et de A comme centre, tra-
çons le cercle de rayon 2a. Soient C'
et E' les intersections de ce cercle
avec si elles existent.
C' et E' sont situés à la distance "a" de
OZ car ils sont sur Δ.
C' et E' sont situés à la distance 2a de
A car ils sont sur Δ.
C' et E' appartiennent donc au lieu L
cherché.

Trisection de l'angle

Recommençons la construction par une autre valeur de "a" autant de fois que nécessaire (c.f-11). On obtient aussi d' autres points C'', E'', C''', E''', etc.....

Joignons ces points à main levée nous obtenons une courbe.

Remarque 1.-

Etant donné un nombre a quelconque, la parallèle et le cercle correspondants ne se couperont pas nécessairement. L'intersection aura lieu pour a ≥ 1/3 AA' où AA' est la distance de A à la bissectrice O Z.

Remarque 2.-

La construction du lieu L sera aussi précise que l'on voudra, il suffit de construire autant de points que nécessaire.

Remarque 3.-

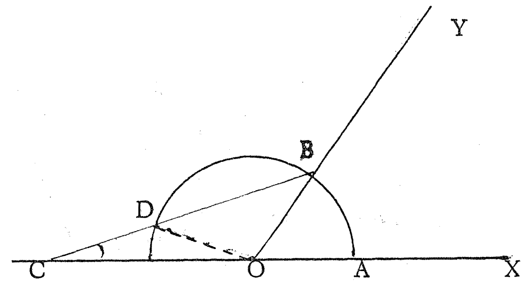
Le lieu trouvé s' apparente à la parabole: La parabole est le lieu des points situés à une même distance d' une droite fixée (directrice) et d'un point donné (foyer). Il serait facile de généraliser: à partir d' un point foyer A et d'une droite directrice fixé ; considérer la famille des courbes-lieux des points dont la distance au foyer vaut K fois la distance à la directrice.

III. Construction
des trisectrices de l'angle X O Y

La construction s' effectuera en trois étapes (fig. 3).

1.- Construction d'un arc de cercle de centre O et rayon O A, qui rencontre O V et O Y en A et B.
2.- Construction de la bissectrice O Z de l'angle X O Y
3.- Construction du lieu L des points dont la distance à A vaut le double de la distance à O Z.

Le point C situé à l'intersection de L de l' arc A B est situé sur l'une des droites trisectrices de l'angle X O Z. Soit D, le symétrique de C par rapport à la bissectrice O Z. Les droites O C et O D sont les droites cherchées.



Trisection de l'angle

(par Jolly 1911)

Construction.

Soit l' angle X O Y à diviser en trois parties égales. Traçons un demi-cercle de centre O, rayon quelconque, qui coupe les côtés de l'angle en A et B. Prolongeons O X au-delà de O. Sur une règle, marquons le segment C D de longueur égale à celle du rayon du cercle construit et transportons ce segment, de telle sorte que D soit sur le cercle, C sur le prolongement de O , et les points C D B alignés.

L'angle B C O vaut alors le tiers de l'angle A O B.

PREUVE

Remarquons que C D = D O = D B = rayon du cercle construit,. Ces segments égaux déterminent des triangles isocèles C D O, et D O B.

Posons O C D = a Il s'ensuit C O D = a et O D B = 2a (angle extérieur au triangle O C D) d' où D B O = 2a et D O B = 180 - 4a

Considérons maintenant les angles du sommet O;

Posons C O D + D O B + B O A =180

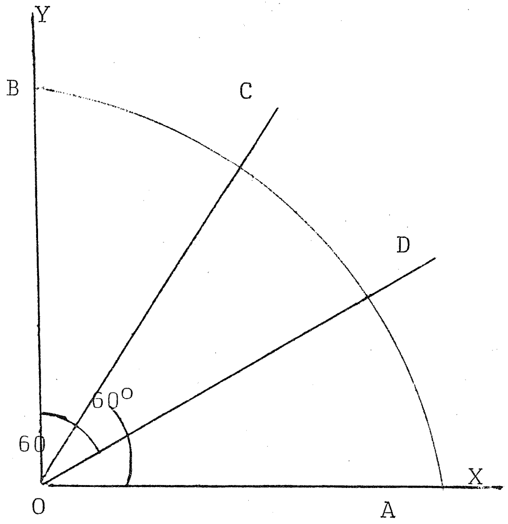
Donc: a + (180 - 4a) + B O A = 180

et a = 1/3 B O A.

suite à la p. 29

Trisection de l'angle droit

Soit X O Y un angle droit. De O comme centre, traçons un cercle de rayon quelconque. Soient A et B les intersections du cercle avec les côtés de l'angle. Avec le même rayon traçons deux cercles de centre A et B qui coupent le premier cercle en C et D. Les droites O D et O C partagent l'angle X O Y en trois angles égaux.



PREUVE

Les triangles A O C et B O D sont équilatéraux, par construction.

donc: A ô C = B ô D = 60º

donc: B ô A - C ô A = 30º