

ORDONNANCEMENT

Conférence donnée par monsieur **Alexis ZINGER**
 au souper-causerie de la Société des Comptables
 en Administration Industrielle . Chapitre Québec.

P.E.R.T.

(Program Evaluation Review Technique)

C' est un grand honneur et aussi un grand plaisir pour un mathématicien statisticien de Montréal de venir s'adresser à la Société des Comptables en Administration Industrielle, en la ville de Québec.

Veillez m' excuser si, au cours de ce souper-causerie, j'ai légèrement tendance à parler de choses qui m' intéressent de plus près, c' est-à-dire des aspects statistiques dans la méthode PERT, méthode qui consiste à évaluer la progression d'un travail.

Remarquez que vous parler du PERT revient, au fond, à vous parler d'une activité que vous connaissez bien. En effet, comme monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, tout le monde fait du PERT, sans le savoir. Par exemple, un homme d'affaires doit prendre et marquer un rendez-vous sur son agenda. Au moment où il va fixer le rendez-vous, il se pose un certain nombre de questions du genre de celles-ci: combien de temps va durer le rendez-vous qui précède? peut-on glisser ce rendez-vous entre deux autres rendez-vous? au fond, ce qu' il est en train de faire, sans le savoir, c' est du PERT.

En passant, un exemple de PERT extrêmement mal fait, c'est un médecin qui remplit son agenda, vous savez tous comme moi que l' attente est quelque fois fort longue et cela s'explique d'ailleurs très simplement étant donné qu'il n' y a pas de pénalité pour le médecin; le patient attend.

Les composantes du PERT, en gros, sont les suivantes: vous avez une suite de tâches à accomplir mais ces tâches ne peuvent pas être accomplies d'une façon libre, il y a aussi des contraintes d'ordre et de temps, par

exemple, une tâche ne peut en précéder une autre.

Pourquoi le PERT, en tant que méthode formalisée, existe-t-il? C' est que, dans des projets d' une certaine envergure, l'ordonnancement intuitif n'est plus suffisant et que l'application d'une méthode formalisée utilisable par un ordinateur électronique permet de tenir compte beaucoup plus simplement d'un grand nombre d'activités. Elle permet de tester facilement l' ordre et la cohérence, elle permet aussi d' identifier des manques possibles et permet d'évaluer l'état actuel d'un travail en un temps extrêmement restreint.

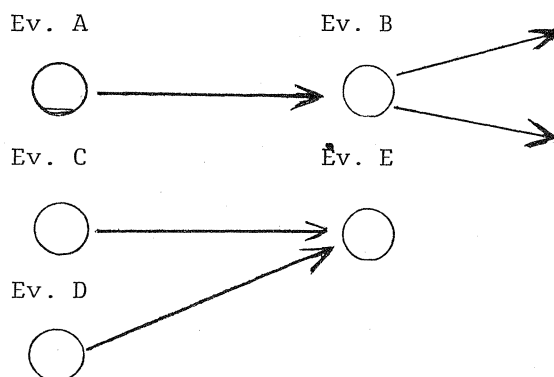
Comment faire un PERT? Je pense que la plus grosse difficulté est de choisir et de définir les événements que l'on rencontre. Il s' agit de formuler des définitions extrêmement exactes, ce qui s' avère souvent assez difficile. Ensuite, une fois que les événements ont été définis, il s' agit de construire un schéma qui montre les relations qui existent entre ces différents événements; ensuite, il s'agit de faire des estimés de temps. Comme nous verrons plus tard, on fait trois sortes d' estimés de temps et enfin la phase qui est sans doute la plus facile, c' est de mettre le tout sur un ordinateur; d' ailleurs tous les ordinateurs possèdent actuellement des programmes qui permettent de faire des analyses de PERT .

Il est bon, je pense, à ce stade, de remarquer qu'à la base de la méthode, il y a une information plus ou moins précise et, évidemment, si cette information est moins précise, on ne peut pas s'attendre à des miracles; le résultat final sera aussi moins précis.

Ordonnancement

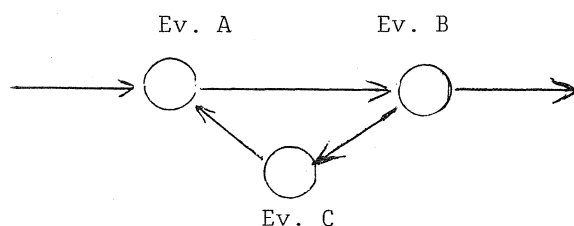
Je vais commencer par définir certains termes, cependant je ne définirai pas le mot "événement". Un autre terme qu'on rencontre souvent est le terme d'activité. Une activité, c'est ce qui sépare les événements. La propriété fondamentale d'une activité est qu'elle prend du temps; prendre du temps peut consister à prendre un temps égal à zéro; cela peut être une activité active; cela peut aussi être une attente, par exemple, pendant que du ciment sèche, il y a un temps d'attente. Des exemples d'activités, au point de vue pratique, sont donnés au schéma I.

S c h é m a - I



L'axiomatique sous-jacente à la méthode PERT se réduit à peu près à ceci: une activité ne peut débuter avant que l'évènement antérieur n'ait eu lieu. Un événement ne peut avoir lieu avant que toutes les activités qui y mènent ne soient terminées. De plus, dans le PERT, on n'admet pas de boucle du genre suivant:

S c h é m a - II



c'est-à-dire que le système ne doit pas pouvoir entrer dans un cercle vicieux.

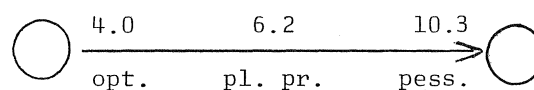
Je vous ai mentionné tout-à-l'heure qu'il y avait des questions d'estimés de temps. Nous allons d'abord définir le temps optimiste.

Un temps optimiste, intuitivement, veut dire qu'une fois sur 100, le temps nécessaire pour accomplir une certaine activité lui est inférieur.

De même, le temps pessimiste est un temps tel que 99 fois sur 100 le temps nécessaire lui est inférieur.

Enfin, le temps le plus probable se définit lui-même. Un exemple de ces trois temps est donné par le

S c h é m a - III



A l'aide de ces trois estimés de temps, on peut établir un temps moyen en faisant une moyenne pondérée de ces trois différents estimés. Remarquez que la pondération peut se faire de différentes façons, cela peut-être, par exemple, 1/3, 1/3, 1/3, ou bien disons 1/6, 2/3 et 1/6, la dernière pondération étant utilisée davantage. En plus d'obtenir un temps moyen, la méthode PERT se sert d'une mesure de dispersion qui est simplement la différence entre le temps pessimiste et le temps optimiste, le tout divisé par 6. C'est en vue de faire intervenir des notions statistiques et probabilistes que l'on a besoin de ces notions de dispersion.

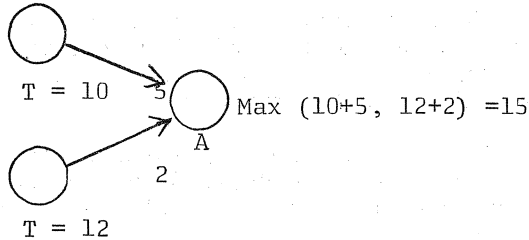
Comment, maintenant, combiner plusieurs activités. Supposons qu'un événement A soit réalisé en 10 semaines, qu'une activité prenne, disons, 2 semaines en moyenne pour atteindre l'évènement suivant. Dans ce cas, il est facile de voir que cet événement suivant sera réalisé au bout de 12 semaines.

Maintenant, il peut aussi se présenter le cas où deux ou plusieurs événements sont reliés à un événement par l'entremise de plusieurs activités; à ce moment-là, on détermine le

Ordonnancement

temps moyen de réalisation de cet évènement de la façon suivante:

S c h é m a - IV

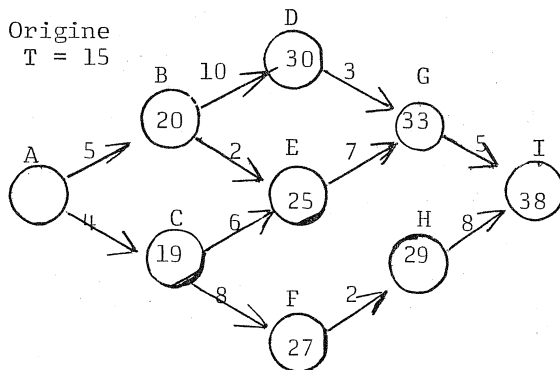


Donc, le temps moyen pour atteindre A est de 15 semaines.

Remarquez qu'il est possible que le temps soit plus petit que 15 semaines, il est aussi possible que ce temps soit en réalité plus grand que 15 semaines, mais de cette façon nous pouvons, pour un schéma, déterminer le temps moyen pour atteindre un objectif en partant d'un ou de plusieurs évènements initiaux.

Nous allons, maintenant, définir ce que nous appellerons un chemin critique: c'est une suite d'activités qui prend le plus de temps à accomplir. Nous allons, à l'aide de quelques graphiques, essayer de voir comment déterminer les chemins critiques.

S c h é m a - V



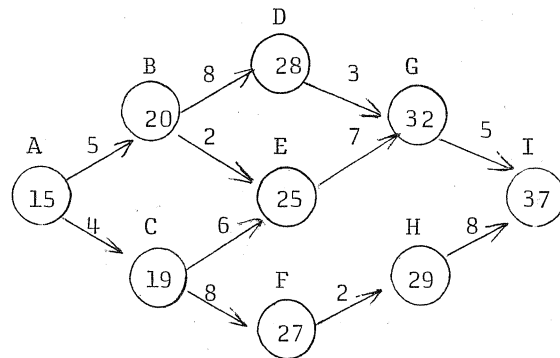
En faisant le genre de calculs que l'on a ébauché, on voit que le chemin critique est donné par la suite d'activités A → B → D → G → I.

Maintenant, essayons de voir ce

qui va se passer si, au lieu de 10 semaines, pour B-D, on avait 8 semaines. A ce moment-là, on voit que le chemin critique change radicalement: D'abord avant il y en avait un, maintenant il y en a deux A → C → E → G → I et A → C → F → H → I et ils ne coïncident absolument pas ou disons très peu avec ce qui se passait auparavant.

La situation est donnée par le schéma 6.

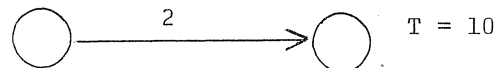
S c h é m a - VI



Une autre façon de penser est de partir du temps où le but doit être atteint. On peut essayer de remonter et de déterminer une suite de temps où chacun des évènements doit être réalisé pour atteindre l'objectif à temps. Ceci constitue le problème inverse.

Le schéma suivant,

S c h é m a - VII



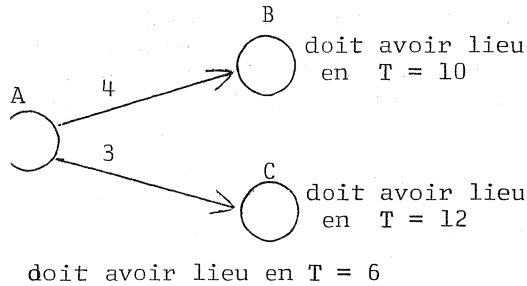
montre que si l'évènement final doit avoir lieu au temps $T = 10$ semaines et si l'activité prend en moyenne 2 semaines, à ce moment-là, l'évènement antérieur doit avoir lieu au temps $T = 8$ semaines. Ce temps de 8 semaines nous allons pouvoir l'appeler "dernier délai".

Maintenant, dans le cas où un évènement est joint à deux évènements finaux et qu'on essaie de remonter

Ordonnancement

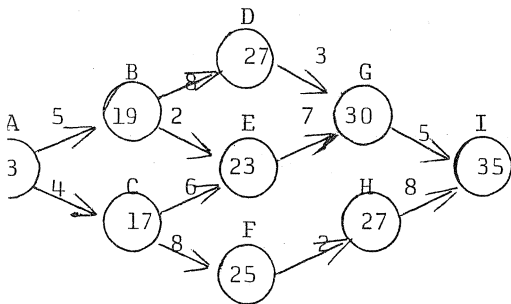
ans le temps, le schéma suivant montre ce qui doit se passer.

S c h é m a - VIII



onsidérons maintenant le schéma 9.

S c h é m a - IX



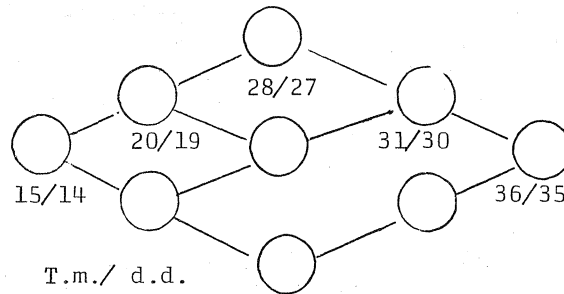
l montre que, en se fixant par exemple un temps de 35 semaines pour arriver à l'objectif, on peut remonter dans le temps et indiquer quels sont les derniers délais possibles pour la réalisation de chaque évènements. Sur le schéma 9 on voit, par exemple, que le dernier délai pour A est 13 semaines.

Nous allons maintenant définir ce que j'appellerais le jeu, en anglais "slack", comme étant le "dernier délai" moins le "temps moyen pour la réalisation". Dans l'exemple que nous venons considéré, le jeu est toujours négatif. Une propriété très importante est que le jeu est minimum sur le chemin critique.

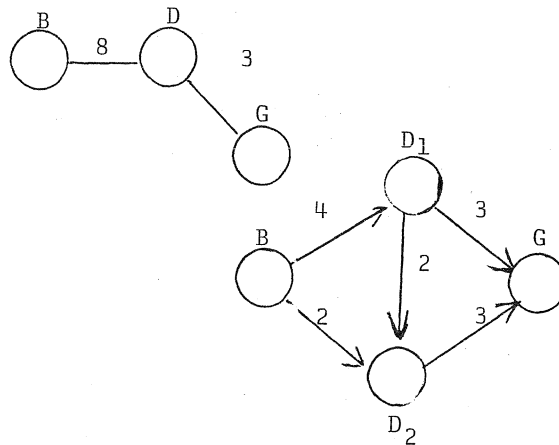
Maintenant, si l'on a un jeu négatif, cela veut dire que l'on ne peut pas arriver à temps. Donc, il faut faire un effort pour réduire le temps nécessaire pour compléter l'ensemble de l'ouvrage. Par exemple, supposons que

le temps de 4 semaines pour A C, sur le schéma, soit réduit à 2 semaines. A ce moment on voit sur le schéma 10 qu'il reste encore un jeu négatif sur le chemin critique A)B)D)G)I .

S c h é m a - X



L'amélioration est insuffisante. Donc, non seulement il faut réduire le temps à 2, mais il faut faire encore plus. Une façon de le faire consiste à mettre des activités en parallèle plutôt qu'en série. Par exemple, en remplaçant la partie.



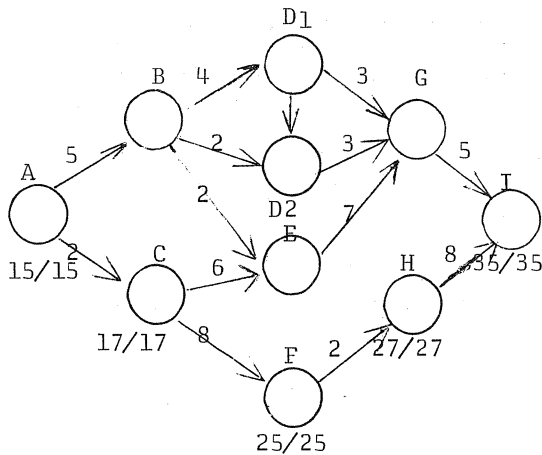
Le schéma XI donne la situation.

.....

Voeux du Nouvel An

Un plus grand nombre de collaborateurs, une plus grande variété de texte.

Ordonnancement



Comme vous voyez maintenant, le jeu sur le chemin critique A)C)F)H)I a été réduit à D ce qui veut dire qu'il est possible d'accomplir la tâche dans le temps requis.

Je vais parler maintenant de notions de statistiques.

Derrière la méthode PERT, il existe un certain nombre d'hypothèses.

La première de ces hypothèses est que le temps moyen est distribué suivant une distribution bêta. Il y a aussi une hypothèse qui dit que la somme d'une somme de variables aléatoires est approximativement distribuée normalement et enfin, il y a une hypothèse qui dit que la variance d'une somme est la somme des variances.

Maintenant, ceci veut dire que l'on suppose qu'il y a indépendance et j'ai l'impression que c'est quelque peu douteux dans le sens suivant: si, sur un chantier il règne une atmosphère de laisser-aller, j'ai l'impression que cela peut-être suffisamment contagieux pour que si une activité est exécutée dans un temps disons pessimiste, l'activité qui la suit ne soit pas indépendante mais sera aussi réalisée dans un temps pessimiste et ainsi de suite. Remarquez que le contraire est aussi vrai car il se peut que l'ambiance en soit une d'activité extrême, les gens sont emballés. A ce moment-là, ce seront des temps optimistes, mais cela voudrait dire que la variance d'une somme à ce moment n'est

plus égale à la somme des variances et il faudrait peut-être repenser la façon dont les calculs de variance, sont faits dans la méthode de PERT.

Voici maintenant un exemple, nous allons supposer que nous sommes sur un chemin critique A)B)G)D, et que les temps sont donnés par la table suivante:

	A	B	C	D
Temps optimiste	1.0	3.2	1.7	
Temps le plus probable	1.8	5.4	3.4	
Temps pessimiste	2.6	10.5	12.5	

En prenant une moyenne pondérée des trois temps, l'on obtient les temps moyens 1.8, 5.9, et 4.6

En divisant par 6 la différence entre le temps pessimiste et le temps optimiste, on obtient des estimés de l'écart standard .27, 1.22 et 1.80

Nous voyons que pour atteindre le point D, le temps moyen est de 12.3 semaines. S'il y a indépendance entre les activités, à ce moment-là l'écart standard pour passer de A à D est de 2.2 semaines. Si nous ajoutons à ceci une hypothèse de normalité, nous voyons que la probabilité d'atteindre D en 14 semaines est de 78%, etc ... C'est-à-dire que nous sommes capables d'assigner à chaque événement une probabilité de réalisation en un temps donné.

On peut se demander quelle est l'utilité d'introduire des notions de probabilité? Je dois dire, à ce stade, que c'est sans doute la grande différence qui existe entre la méthode dite C.P.M. qui est la méthode du chemin critique et la méthode PERT. La méthode PERT fait intervenir des notions de probabilité et d'utilité, j'espère pouvoir l'illustrer avec un exemple très simple.

Ordonnancement

Supposons que nous avons deux alternatives. Dans la première alternative, en suivant un certain chemin, le coût est disons de 10 unités et la probabilité d'arriver à temps est de $3/10$. Supposons, dans la deuxième alternative que le coût est de 30 unités et la probabilité d'arriver à temps est de $8/10$. La question qui se pose à quelqu'un qui planifie, est: quelle alternative choisir? Est-ce qu'il vaut mieux utiliser le plan 1, ou est-ce qu'il vaut mieux utiliser le plan 2?

La réponse, évidemment, est que tout dépend des pénalités. Si la pénalité est de 20 unités; sous la première hypothèse le coût total est de 10 plus $7/10$ de 20, c'est-à-dire 24; sous la deuxième hypothèse, le coût est de 30 plus $2/10$ de 20, c'est-à-dire 34. Autrement dit, le plan 1 s'avère meilleur. Mais si la pénalité est de 100, à ce moment-là, le coût pour la première devient 10 plus $7/10$ de 100,

c'est-à-dire 80; et pour la deuxième devient 30 plus $2/10$ de 100, c'est-à-dire 50. Autrement dit, le deuxième, est meilleur.

Ceci n'est qu'un exemple très simpliste, mais en même temps très important, car il ouvre de nouvelles possibilités. Je sais qu'actuellement des chercheurs sont en train de généraliser la méthode PERT de façon à faire intervenir des notions de coût en tenant compte du coût du travail et en tenant aussi compte des pénalités. Avec une telle modification, il devient possible d'arriver à la solution la moins coûteuse.

En conclusion, je dirais que la méthode PERT est un outil puissant si l'on veut être en plein contrôle d'une suite d'évènements. Je pense que lorsqu'elle est bien utilisée, elle permet de réduire les coûts, ce qui est un facteur extrêmement important.