LES NOMBRES FIGURES

Les Nombres Triangulaires *

Sommaire

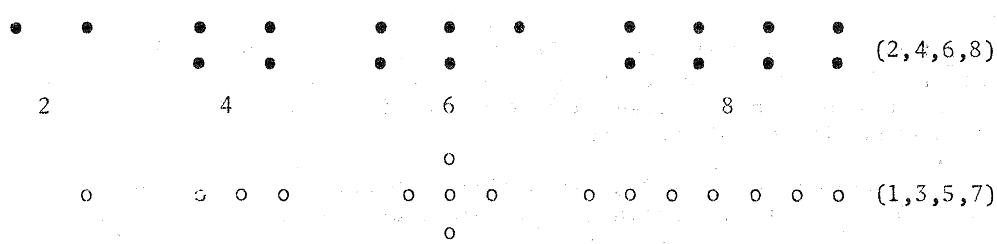
On appelle "nombres figurés", des nombres pouvant être représentés par des figures géométriques. Ils furent étudiés par les Chinois aux environs de l'an 1000 av. J.C. et l'arithmétique grecque y consacra beaucoup d'efforts.

L'étude de ces nombres présente beaucoup d'intérêt à cause de leur rôle précurseur dans l'étude des suites et des séries. Ils peuvent, en effet, servir d'introduction à l'étude des progressions arithmétiques et de l'analyse combinatoire.

Le présent article traite exclusivement d'une seule classe de nombres figurés, les nombres triangulaires et cela d'une façon bien incomplète.

1. Nature et Origine des nombres figurés.

Dans le livre chinois "Le livre des permutations" écrit 500 ans avant Pythagore, on parle de nombres mâles, (nombres impairs) et de nombres femelles (nombres pairs). Les nombres désignent chez-eux, le vent, le feu, l'eau, etc. On y représente aussi les nombres par des dessins formés de cercles blancs, pour les nombres mâles, et de cercles noirs pour les nombres femelles. Le Lo Shu (ou carré magique) suivant, est le plus ancien jamais trouvé. Il date de l'an 1000 avant Jésus-Christ. Les nombres pairs sont écrits sous forme de rectangles et les nombres impairs sous forme de droites ou de croix.



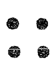
* RÉFÉRENCE: "Les mathématiques pour tous" de L. Hogben.
"Mathematical Excursions" de H. Merrill.

Une bonne partie de l'arithmétique grecque consistait à étudier les nombres figurés. Les nombres figurés présentent beaucoup d'intérêt du fait qu'ils ont conduit à l'étude des suites, lesquelles sont utilisées dans l'approximation des nombres irrationnels, le calcul des logarithmes, le calcul des tables de fonctions trigonométriques, pour ne mentionner que quelques emplois.

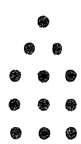
On appelle "suite", une énumération de nombres, rangés dans un ordre défini, et suivant une règle déterminée. Par exemple, la suite des termes 1,2,3,4,5,6,7 ... est appelée "suite" au sens mathématique du mot. La loi de formation de cette suite, c'est que chaque terme est formé en ajoutant une unité au terme qui le précède. Si l'on ajoute que le premier terme est 1 et qu'il y a dix termes dans la suite, la reconstruction de cette suite devient chose bien facile.

2. Enumération des différentes classes de nombres figurés.

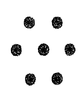
On rencontre différentes classes de nombres figurés. Les nombres figurés peuvent être partagés en grandes familles suivant leur forme. Ainsi, l'on peut parler de nombres carrés (1), de nombres pentagonaux (2), de nombres hexagonaux (3), de nombres étoilés (4), de nombres triangulaires (5), de nombres tétraédriques (6), de nombres pyramidaux à base carrée (7), à base pentagonale, à base hexagonale, etc.



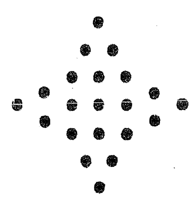
(1)



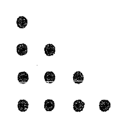
(2)



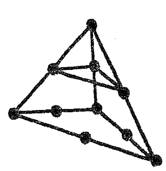
(3)



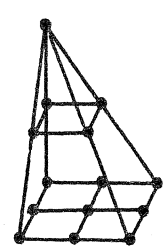
(4)



(5)



(6)



(7)

3. Les nombres triangulaires simples et l'analyse combinatoire. Formules génératrices des nombres triangulaires.

Etudions d'un peu plus près les nombres triangulaires. Nous appellerons nombres triangulaires simples, les nombres formant la suite 1,3,6,10,15,21 ... Pour nommer les termes d'une suite, employons le procédé suivant: plaçons au-dessus de chacun des termes de la série, la suite des entiers naturels:

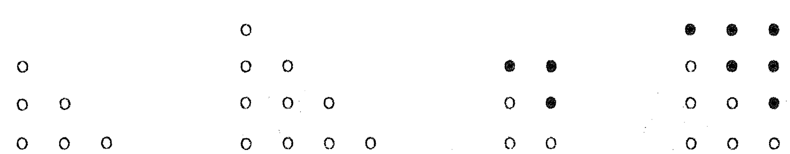
1	2	3	4	5	6	7	8	9 ....
1	3	6	10	15	21	28	35	44 ....

Nous appellerons la suite du dessus, la suite mère, et la suite du dessous, la suite fille. Nous utiliserons la lettre T pour désigner un terme quelconque de la série fille, en plaçant le nom de la mère du côté inférieur droit de la lettre T. Ainsi, T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , ... désigneront les filles 1,3,6,10,15,21, ...

Qu'ont de particulier ces nombres 1,3,6,10, ... ? Leur figuration nous aide à reconnaître certaines propriétés. En effet, un coup d'oeil plus attentif nous montre que T_3, par exemple, est la somme des 3 premiers entiers naturels. (1+2+3). De même T_4 est la somme des 4 premiers entiers naturels (1+2+3+4).

La réponse au problème suivant: "Quelle est la somme des 10 premiers entiers naturels"? se trouve instantanément: elle est T_{10} (le dixième nombre triangulaire simple). Mais, comment trouver rapidement T_{10} ? ou encore T_n ?

Eh! bien, voici: remarquons qu'un nombre triangulaire simple peut toujours être utilisé pour former un rectangle. Ainsi, avec T_2, on peut former un rectangle mesurant 2 par 3. Avec T_3, on peut former un rectangle de 3 par 4.



(T_3) (T_4) 2 fois T_2 2 fois T_3

Il est donc normal de conjecturer ou d'induire, qu'avec T_{10} l'on puisse former un rectangle de 10 par 11, et avec T_{20} un rectangle de 20 par 21. Un rectangle de 10 par 11, ou de 110 points, égale donc deux fois le nombre triangulaire T_{10}, d'où l'on tire que $T_{10} = 110/2 = 55$. La somme des dix premiers entiers naturels est donc de 55.

Sans plus de difficulté, l'on trouve que la somme des 100 premiers entiers naturels est de $\frac{100 \times 101}{2} = 5,050$.

Généralisant, l'on trouve que

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

On écrit très souvent, $\sum_{1}^{10} n$ pour T_{10} et $\sum_{1}^{100} n$ pour T_{100}. Le symbole $\sum$ (sigma) veut dire "somme" et $\sum_{1}^{10} n$ veut dire la somme de tous les nombres entiers lorsque n varie de 1 jusqu'à 10, ce qui donne $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$. On peut donc écrire en langage savant

$$\sum_{1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ce résultat peut nous être utile pour solutionner des problèmes d'analyse combinatoire.

Par exemple, nous désirons choisir deux volumes parmi les deux situés sur l'étagère. Combien de choix différents pouvons-nous faire ? Pratiquement, nous n'avons pas de choix puisqu'il nous faut choisir les deux volumes placés devant nous. On dira qu'il n'y a qu'une façon de choisir deux volumes parmi deux. En langage mathématique. on dit que le nombre de combinaisons de deux objets pris deux à la fois, est un, et l'on écrit: $C_2^2 = 1$. Le 2 du haut, indique le nombre d'objets que nous prenons; le 2 du bas indique le nombre d'objets disponibles. C veut dire "combinaison". Avec cette notation, l'on écrira "le nombre de façons de choisir deux objets parmi trois" comme suit: C_2^3. Ceci se lit: "Le nombre de combinaisons de 3 objets pris 2 à la fois".

Si nous désirons prendre 2 volumes parmi les 3 placés sur l'étagère, nous pourrons choisir AB, AC, ou BC; ce choix peut donc se faire de 3 façons différentes,

d'où $$C_2^3 = 3 .$$

Poursuivant ce raisonnement, l'on trouve que $C_2^4 = 6$, $C_2^5 = 10$. Que constatons-nous ? Comme $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ et $T_4 = 10$, l'on peut conclure(*) que

$$C_2^n = T_{n-1} \tag{2}$$

car $T_1 = C_2^2$, $T_2 = C_2^3$, $T_3 = C_2^4$ etc.

Exemple: De combien de façons différentes pouvons-nous choisir 2 objets parmi 10 ?

Solution: Nous pouvons choisir 2 objets parmi 10 de C_2^{10} façons différentes; soit $C_2^{10} = T_9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$.

Autre exemple: De combien de façons différentes pouvons-nous choisir 2 cartes dans un jeu de 52 cartes ?

Solution: $C_2^{52} = T_{51} = \frac{51 \times 52}{2} = 51 \times 26 = 1{,}326$.

5. Les nombres triangulaires du second ordre.

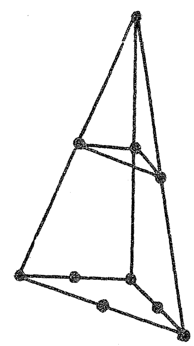
On appelle "nombres triangulaires du second ordre" les nombres triangulaires formés à partir des nombres triangulaires simples.

Le premier nombre triangulaire du second ordre est 1.
Il est dénoté (T_1^2).
Le second nombre triangulaire du second ordre est $1 + 3 = 4$ $(T_2^2 = 4)$.
Le troisième nombre triangulaire du second ordre est $1 + 3 + 6 = 10$ $(T_3^2 = 10)$ et ainsi de suite, pour trouver 20, 35, 56, etc.

Les nombres triangulaires du second ordre sont donc: 1,4,10,20,35,56,84,...
Ils peuvent être représentés par des tétraèdres:

(*) $C_2^n = T_{n-1}$ se vérifie directement, si l'on se souvient que

$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ et $T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$.



$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
4 &= 1 + 3\\
10 &= 1 + 3 + 6\\
20 &= 1 + 3 + 6 + 10\\
35 &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15\\
56 &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21
\end{aligned}
$$

Comment sont formés ces nombres triangulaires du second ordre ? Une façon d'obtenir une formule nous permettant de les calculer serait la suivante:

Enumérer la suite fille, la suite mère, et la suite grand'mère, s'il le faut.

Suite Grand'mère	1	2	3	4	5	6	7	...
Suite mère	1	3	6	10	15	21	28	...
Suite fille	1	4	10	20	35	56	84	...

$$\frac{1+2}{3} \times 1 \quad \frac{2+2}{3} \times 3 \quad \frac{3+2}{3} \times 6 \quad \frac{4+2}{3} \times 10$$

On pourrait vérifier que les termes de la suite fille sont obtenus comme suit:

$$T_2^2 = 4, \quad T_3^2 = 10, \quad T_4^2 = 20$$

En général, ce processus donne

$$T_n^2 = \frac{n+2}{3} \times T_n = \frac{n+2}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{car} \quad T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad T_n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \qquad (3)$$

Revenons au problème d'analyse combinatoire étudié plus haut, nous demandant la question suivante ? De combien de façons différentes pouvons-nous choisir 3 objets parmi 3?, c'est-à-dire: Que vaut C_3^3 ? Eh! bien, $C_3^3 = 1$. Le nombre de façons de choisir 3 objets parmi 4 est de 4. Donc, on trouve successivement que

$$C_3^4 = 4, \quad C_3^5 = 10, \quad C_3^6 = 20, \quad C_3^7 = 35 .$$

Comparant aux nombres triangulaires, nous trouvons que

$$C_3^3 = T_1^2, \quad C_3^4 = T_2^2, \quad C_3^5 = T_3^2, \quad C_3^6 = T_4^2 \quad \therefore \quad C_3^n = T_{n-2}^2$$

et comme $T_n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$ nous aurons

$$T_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-1)(n)}{2\cdot 3} \quad \therefore \quad C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} .$$

Ainsi, de combien de façons différentes pouvons-nous choisir 3 cartes dans un jeu de 52 cartes ?

Solution: Le nombre de façons de choisir 3 cartes dans un jeu de 52 cartes est de $C_3^{52} = \frac{52 \times 51 \times 50}{2 \times 3} = 22,100$. Il y a donc beaucoup plus de façons de choisir 3 cartes dans un jeu de cartes que d'en choisir 2. (On avait trouvé 1,326 pour ce dernier problème).

Si, par exemple, vous pariez pouvoir tirer trois cartes données d'un jeu, les chances contre vous seront de 22,099 contre 1.

6. Les nombres triangulaires du troisième ordre.

Vous avez sûrement réalisé que cette étude des nombres triangulaires peut se prolonger bien loin. Il suffira donc de mentionner très brièvement, que les nombres triangulaires du troisième ordre, sont formés à partir de ceux du deuxième ordre, comme ceux-ci étaient formés à partir des nombres triangulaires simples.

L'énumération des suites filles, mères, grand'mère, arrière grand'mère nous donne:

Suite arrière grand'mère:	1	2	3	4	5	6	7
Suite grand'mère	1	3	6	10	15	21	28
Suite mère	1	4	10	20	35	56	84
Suite fille	1	5	15	35	70	126	

Ces nombres triangulaires du troisième ordre sont dénotés

$$T_1^3 = 1, \quad T_2^3 = 5, \quad T_3^3 = 15, \quad T_4^3 = 35, \ldots$$

On voit que le mode de formation des termes de cette suite est analogue à celui des termes de la suite des T^2.

$$T_1^3 = 1 \qquad\qquad T_1^3 = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$T_2^3 = 1 + 4 \qquad\qquad T_2^3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

ou

$$T_3^3 = 1 + 4 + 10 \qquad\qquad T_3^3 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$T_4^3 = 1 + 4 + 10 + 20 \qquad\qquad T_4^3 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

En général $\qquad T_n^3 = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$.

Le problème correspondant d'analyse combinatoire, est celui qui consiste à calculer le nombre de façons, de choisir 4 objets parmi 4 (C_4^4), ou parmi 5 (C_5^5), ou parmi 6, etc. Chacun devrait pouvoir trouver que $C_4^4 = 1$, $C_4^5 = 5$, $C_4^6 = 15$, $C_4^7 = 35$, d'où $C_4^n = T_{n-3}^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$.

Ce résultat nous permet de prédire, par exemple, que le nombre de façons différentes de choisir 4 cartes parmi un jeu de 52 cartes sera de C_4^{52} ou encore T_{49}^3 , c'est-à-dire, le 49e nombre triangulaire du troisième ordre.

$$T_{49}^3 = \frac{49 \times 50 \times 51 \times 52}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 49 \times 25 \times 17 \times 13 = 270{,}725.$$

En d'autres mots, il existe 270,724 chances contre une de pouvoir tirer les quatre as d'un jeu de 52 cartes en prenant au hasard, 4 cartes du jeu.

Exercice: Essayons de montrer que les nombres triangulaires du quatrième ordre (T_n^4) peuvent être représentés par l'expression

$$T_n^4 = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

et qu'ils correspondent aux nombres de façons de choisir 5 cartes parmi un certain nombre n de cartes (n plus grand ou égal à 5).

Nous devrions trouver pour cette suite de nombres:

1, 6, 21, 56, 126, ...

7. Les triangles évanouissants.

Il existe un artifice très simple permettant de trouver comment certaines suites sont construites. Nous disons bien "certaines suites" car il n'est pas toujours facile de trouver le mode de formation d'une suite.

Autre exemple: Prenons quelques termes de la suite des nombres triangulaires simples 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... et écrivons, au-dessus, la différence entre deux termes successifs, et répétons la manoeuvre jusqu'à l'obtention de zéros. Nous obtenons un triangle nommé "triangle évanouissant".

```
                    0
                  0   0
                0   0   0
              0   0   0   0
            0   0   0   0   0
          1   1   1   1   1   1
        2   3   4   5   6   7   8
      1   3   6  10  15  21  28  36
```

Il est possible de montrer, parait-il, que toutes les suites pouvant être représentées figurativement, dérivent de suites de nombres triangulaires et par conséquent, qu'elles peuvent être représentées par un triangle évanouissant.

Exemple: Soit la suite 1, 5, 14, 30, 55, 91, ...

Il est très difficile de voir, à première vue, la loi régissant la formation de cette suite. Cependant, la construction du triangle évanouissant correspondant, nous donne

```
                    0
                 1     1
              2     2     2
           5     7     9    11
        4     9    16    25    36
     1     5    14    30    55    91
```

Nous voyons, d'après ce triangle évanouissant, que le mode de formation de cette suite est 1, $(1^2 + 2^2)$, $(1^2 + 2^2 + 3^2)$, etc. Les termes de la suite sont donc formés des sommes partielles des carrés des entiers naturels, et peuvent donc être représentés par des nombres pyramidaux à base carrée.

Jacques C. Bergeron, Rigaud.