CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES ET QUADRATURE DU CERCLE

1 - INTRODUCTION

Le problème de la construction des figures géométriques n'est certes pas nouveau; bien avant les Grecs, il se posait déjà, et c'est de cette époque que l'on tient la traditionnelle restriction à la règle et au compas. Malgré sa simplicité, l'on ne parvint à le caractériser entièrement que très tard.

Certaines constructions, de polygones réguliers par exemple, sont facilement réalisables à l'aide de la règle et du compas seulement; mais pour construire l'arête d'un cube dont le volume serait double de celui d'un cube donné, à la règle et au compas, il faut ajouter une équerre; enfin, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle, etc... peuvent être faites, mais on prouvera que la règle et le compas sont insuffisants.

En conséquence, on s'attendra à ce que relativement peu de figures soient constructibles avec règle et compas seuls. En fait, à peu près toute figure dans le plan peut-être construite, à la condition de bien vouloir utiliser les instruments nécessaires. Il est donc clair que dans un problème, il faille bien spécifier à quels instruments l'on veut se restreindre, (à toutes fins théoriques, la précision de ceux-ci étant considérée comme parfaite).

Historiquement, les problèmes de constructions les plus difficiles qui, après des siècles d'études et d'essais acharnés restaient sans solution, subirent le même sort que le problème purement algébrique de la "résolution par radicaux" de l'équation générale de degré n c'est-à-dire à l'aide des opérations $+$, $-$, x et $\div$, et des puissances rationnelles seulement. (On sait qu'actuellement, toute équation de degré n peut être résolue avec une précision aussi grande qu'on veut; il suffit d'utiliser des méthodes numériques plus puissantes). Il fallut, en effet, attendre jusqu'au XIX^{e} siècle, et le génie norvégien Abel, pour que l'idée _ alors révolutionnaire _ de prouver l'impossibilité de "résoudre par radicaux" l'équation générale, fut enfin conçue. La solution définitive de ce problème fut le fruit des travaux du jeune Evariste Galois.

- CONSTRUCTIONS ELEMENTAIRES ET EXEMPLES

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à énoncer quelques constructions de base (possibles avec règle et compas seuls) que nous utiliserons dans quelques exemples.

1) Etant donné une droite et un point, construire la perpendiculaire à la droite, passant par le point.

2) Etant donné une droite et un point, construire la parallèle à la droite, passant par le point.

3) Etant donné un angle, construire la demie de cet angle.

4) Etant donné un angle, construire un multiple entier de cet angle.

5) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur $a + b$.

6) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur $a - b$, lorsque $a \geqslant b$.

7) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur ab.

8) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur a/b.

9) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur ra où r est un nombre rationnel positif.

10) Etant donné l'unité de longueur et des segments de longueur a et b, construire le segment de longueur $\sqrt{a}$.

Toute construction dont la résolution consisterait en une suite de ces constructions est faisable avec règle et compas seuls.

Or, les problèmes se posent généralement de la façon suivante:

"Etant donnés les lignes et les points a, b, c, ... est-il possible de construire [1] le point ou la ligne x ?" (La construction elle-même est d'un tout autre intérêt).

---

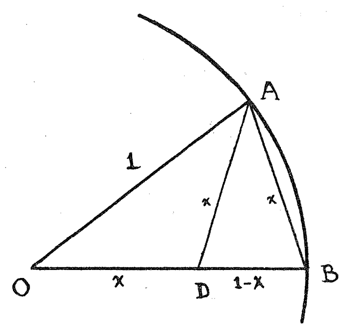
(1) Dorénavant, "construire" veut dire "construire à l'aide de règle et compas seuls".

Un "bon" procédé à suivre est le suivant: On calcule la valeur de x algébriquement, et l'on se demande si oui ou non les "instruments algébriques" nécessaires à évaluer x en fonction de $a, b, c\ldots$, "dépassent les capacités" des instruments géométriques que sont la règle et le compas.

Illustrons ceci pas quelques exemples.

Problème: Etant donné un cercle de rayon 1, est-il possible de construire le décagone régulier inscrit ?

Examinons d'abord le problème algébriquement:



Soit $AB = x$ le côté du décagone. Alors le triangle AOB est isocèle, donc $\hat{A} = \hat{B} = 72^o$. Bisséquons $\hat{A}$; on obtient alors 2 triangles isocèles ODA et DAB tels que BA = AD = DO; et de plus, 2 triangles semblables AOB et ADB; d'où on tire $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ dont la solution positive est $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ce qui est parfaitement constructible; en effet, on applique 9), puis 10), puis 6), puis 9).

On pourrait ajouter en passant, qu'en effectuant une suite de bissections d'angles, tous les polygones réguliers ayant 2^k, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$ sont constructibles. Enfin Gauss démontra que les polygones réguliers ayant un nombre premier de côtés, sont constructibles, si et seulement si ce nombre premier est de la forme $2^{2^n} + 1$!!

Le Problème d'Apollonius: Etant donnés trois cercles, est-il toujours possible de construire un quatrième cercle qui soit tangent aux trois autres ?

Afin d'envisager le problème algébriquement, introduisons un système d'axes rectangulaires: soient donc

(x_1, y_1) le centre du cercle no. 1 de rayon r_1

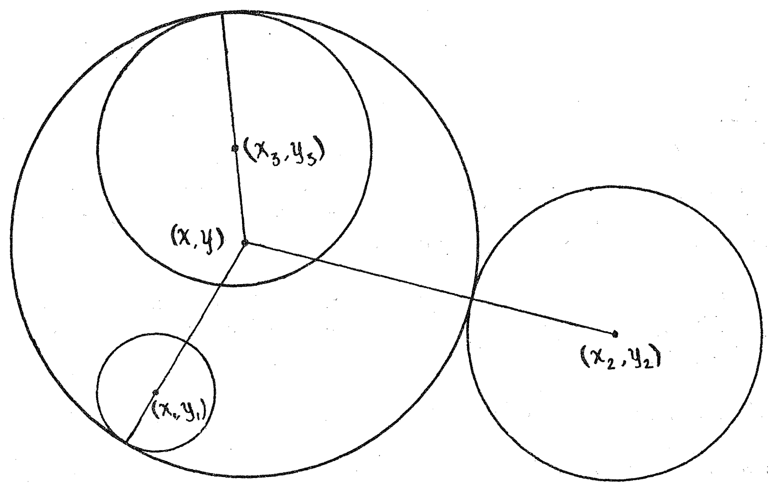
(x_2, y_2) le centre du cercle no. 2 de rayon r_2

(x_3, y_3) le centre du cercle no. 3 de rayon r_3

$(x\ , y\ )$ le centre du cercle d'Apollonius de rayon r, disons.

Alors, selon que le cercle d'Apollonius sera tangent extérieurement ou intérieurement, pour chacun des cercles donnés, on aura:

$$\text{no. 1: } (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0$$
$$\text{no. 2: } (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0$$
$$\text{no. 3: } (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0$$



On a donc un système de 3 équations à 3 inconnues, chaque inconnue apparaissant au second degré, toujours avec le même coefficient, de sorte que l'on peut en soustrayant ces équations l'une de l'autre, tomber sur le premier degré:

$$\left.\begin{array}{l} (1) - (2) \rightarrow ax + by + cr = d \\ (1) - (3) \rightarrow a'x + b'y + c'r = d' \end{array}\right\} (*)$$

où a, b, c, ... sont obtenus seulement par +, -, x à partir des x_i, y_i, r_i.

On remarque encore que le système (*) peut être résolu pour x et y en fonction de r. Substituant dans les équations originales on obtient des équations du second degré à une inconnue, toute solution négative étant à rejeter.

Or, construire le cercle revient à construire x, y et r et on remarque que x, y et r sont obtenus des x_i, y_i et r_i par

+, -, x, ÷ et par extraction de racines carrées. Cette construction est donc possible en appliquant un certain nombre de fois les constructions de base 5), ... , 10) aux x_i, y_i et r_i .

Remarque: Ce problème ne possède pas toujours de solution; par exemple, si les 3 cercles sont concentriques ou s'ils sont dégénérés en points colinéaires, etc... , mais ces considérations sont indépendantes de nos intérêts précis. Car il s'agit ici d'existence et non de constructibilité.

; - THEORIE GENERALE

Afin de caractériser la classe des figures constructibles avec règle et compas seuls, il est essentiel de préciser ce qu'on entend par "construction avec règle et compas".

Par définition, une construction avec règle et compas est une suite finie d'étapes, chacune de ces étapes consistant à faire une des cinq opérations suivantes :

1) joindre deux points par une droite

2) trouver l'intersection de deux droites

3) tracer un cercle de rayon et de centre donnés

4) trouver l'intersection de deux cercles

5) trouver l'intersection d'une droite avec un cercle.

On remarque d'ailleurs qu'au sens de cette définition, les constructions de base 1), ... , 10) sont des "constructions avec règle et compas".

Posons le problème de la façon suivante:

Imaginons un système d'axes rectangulaires; ceci revient à la donnée du segment unité déterminant le point $x = 1$, $y = 0$. A l'aide de la règle et du compas, à partir du segment 1, on peut construire d'autres points dans le plan; quelles sont les coordonnées de ces points ?

On a vu que chaque élément de l'ensemble R_o des nombres rationnels peut être construit à partir du segment de longueur 1. (voir construction de base 9)).

Soit $\sqrt{2}$ qu'on sait pouvoir construire. A partir de R_o et $\sqrt{2}$, on peut maintenant construire l'ensemble de tous les nombres de la forme $a_o + b_o \sqrt{2}$ où a_o et $b_o \in R_o$. Plus généralement, soit $k_o \in R_o$ et k_o tel que $\sqrt{k_o} \notin R_o$.

On peut construire tout élément de l'ensemble

$$R_1 = \{a_o + b_o\sqrt{k_o}\} \quad \text{où} \quad a_o, b_o, k_o \in R_o \quad \text{et} \quad \sqrt{k_o} \notin R_o .$$

De la même façon, on peut construire tout élément de l'ensemble

$$R_2 = \{a_1 + b_1\sqrt{k_1}\} \quad \text{où} \quad a_1, b_1, k_o \in R_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{k_1} \notin R_1 ,$$

et ainsi de suite, par récurrence, soit

$$R_{n+1} = \{a_n + b_n\sqrt{k_n}\} \quad \text{où} \quad a_n, b_n, k_n \in R_n \quad \text{et} \quad \sqrt{k_n} \notin R_n .$$

Nous avons donc la suite d'inclusions suivante:

$$R_o \subset R_1 \subset R_2 \; \ldots \subset R_n \subset R_{n+1} \; \ldots$$

et le théorème suivant:

Théorème 1 : Quelque soit $n = 0, 1, 2, \ldots$ et quelque soit $x \in R_n$, x peut être construit à l'aide de la règle et du compas seulement, à partir du segment unité.

Théorème 2 : Il est impossible de "sortir" d'un R_n à l'aide de la règle seulement.

Preuve : On a vu que la seule façon de déterminer un point à l'aide de la règle seulement, c'est de construire l'intersection de deux droites;

Soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

deux droites avec $\alpha, \beta \ldots \in R_n$ les solutions sont

$$x_o = \frac{\beta\alpha' - \gamma\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad \text{et} \quad y_o = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Or R_n est un corps; donc x_o et y_o qui sont les coordonnées de l'intersection des deux droites à paramètres appartenant à R_n, appartiennent aussi à R_n.

c.q.f.d.

Théorème 3 : A l'aide de la règle et du compas seulement, seuls les nombres de la forme $x \in R_n$ peuvent être construits à partir du segment unité.

Preuve : On a vu que les seules façons de construire des points à l'aide de la règle et du compas seulement, sont d'interséquer 2 droites, 2 cercles ou un cercle et une droite. Le cas de 2 droites étant réglé au théorème précédent, examinons si l'intersection d'un cercle et d'une droite permet des nombres $\notin R_n$ quel que soit n.

Soient $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ un cercle

$ax + by + c = 0$ une droite;

où on a $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in R_n$ pour un certain n.

Solutionnant ce système d'équation, on trouve que

$$x_o = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2A} \quad \text{et} \quad y_o = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4\,A'C'}}{2A'}$$

où il est facile de voir que $A, B \ldots \in R_n$. D'où $x_o, y_o \in R_{n+1}$. Par un raisonnement analogue, les coordonnées de l'intersection de deux cercles appartiennent aussi à R_{n+1} .

c.q.f.d.

I - DUPLICATION DU CUBE

Nous allons, dans ce paragraphe, démontrer l'impossibilité de l'un des trois célèbres problèmes grecs.

Le problème est le suivant:

Est-il toujours possible de construire l'arête d'un cube dont le volume serait double de celui d'un cube donné ?

Solution : Supposons que l'arête du cube donné est 1; alors il s'agit de construire l'arête du cube de volume 2, c'est-à-dire le nombre $x = \sqrt[3]{2}$.

Supposons que ce nombre soit constructible, alors d'après le théorème 3, $x \in R_n$ pour un certain entier n. Evidemment $x \notin R_0$ car $x = \sqrt[3]{2}$ est irrationnel. Soit donc $h > 0$ le plus petit indice pour lequel on a $x \in R_h$. Alors on a

$$x = a + b\sqrt{k}\ ,\quad a,\ b,\ k\ \varepsilon R_{h-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{k} \notin R_{h-1}$$

Mais comme $x \varepsilon R_h$, $x^2\ \varepsilon R_h$, donc aussi $x^3\ \varepsilon R_h$, donc enfin $x^3 - 2\ \varepsilon R_h$. On peut donc écrire

$$(*) \qquad x^3 - 2 = a' + b'\sqrt{k'}\ ,\quad a',\ b',\ k'\ \varepsilon R_{h-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{k'} \notin R_{h-1}$$

Remplaçons maintenant $x = a + b\sqrt{k}$ par $y = a - b\sqrt{k}$; alors il est facile de calculer que

$$(**) \qquad y^3 - 2 = a' - b'\sqrt{k'}$$

Or par définition de x, $x^3 - 2 = 0$; l'équation (*) entraîne alors que $a = b = 0$; mais alors l'équation (**) devient

$$y^3 - 2 = 0\ .$$

On voit donc que x et y sont deux solutions réelles et distinctes de l'équation $z^3 - 2 = 0$, ce qu'on sait être impossible: il n'y en a qu'une seule et c'est $\sqrt[3]{2}$. Cette contradiction provient du fait que nous avons supposé x constructible.

Conclusion: x n'est pas constructible, donc il n'est pas toujours possible de construire avec règle et compas seuls, l'arête d'un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné.

- QUADRATURE DU CERCLE

Le problème est le suivant:

Etant donné un cercle, construire un carré qui a même aire que le cercle.

Solution : La donnée d'un cercle est équivalente à la donnée d'un nombre R représentant le rayon de ce cercle, tandis que la construction d'un carré équivaut à la construction d'un nombre x représentant le côté de ce carré.

Supposons que $R = 1$; alors l'aire du cercle est π, donc le problème consiste à construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$. Or on sait que le nombre π est transcendant; il s'en suit que $\sqrt{\pi}$ l'est aussi; donc il ne saurait appartenir à un ensemble de la forme R_n.

Conclusion: La quadrature du cercle est impossible avec règle et compas seulement.

Pierre-Yves Leduc, Montréal.