## SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DU CANADA

## CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC, 1962

### COMPTE-RENDU

La Société Mathématique du Canada, organisait le 4 mai 1962 son quatrième concours mathématique annuel dans la province de Québec.

Le concours réunissait 560 candidats représentant 91 institutions. En accord avec les règlements, deux grands prix de $100 et de $50 furent décernés aux deux premiers candidats. Un prix de $25 fut accordé au premier candidat de dix districts de la province et quatorze autres prix de $25 furent remis aux autres candidats les mieux classés. Enfin six bourses d'études de $250 chacune furent distribuées par la Compagnie Sun Life Assurance of Canada.

La distribution des prix eut lieu à l'occasion de la Journée des Gagnants dont les principales activités furent: visites de McGill University et de l'Université de Montréal où fut tenu la distribution des prix, visites des Centre de Calcul de la compagnie Sun Life Assurance of Canada et des usines de Canadair, séminaire auquel participèrent les quarante neuf (49) premiers étudiants et douze (12) professeurs et instituteurs.

Membres du Comité du Concours :

Abel Gauthier, professeur de mathématiques, Université de Montréal
E.W. Crowe, actuaire-associé, Sun Life Assurance Company of Canada
Maurice L'Abbé, directeur du département de mathématiques, Université de Montréal
E.J. Malone, Directeur de district, Commission scolaire catholique de Montréal
R.E. O'Connor, S.J., directeur du département de mathématiques, collège Loyola, Montréal
M.l'abbé G. Perras, doyen de la faculté des arts, Université de Montréal
L.F.S. Ritcey, directeur-général de la Société Mathématique du Canada
R.C. Rose, directeur-régional, Commission des écoles catholiques de Montréal
Peter Sandiford, directeur du département de la recherche, TCA
E. Rosenthall, directeur du département de mathématiques, McGill University
W.L.G. Williams, trésorier de la Société Mathématique du Canada
H.R. Matthews, directeur des études, Commission scolaire protestante de Montréal

Examinateurs et correcteurs :

A. Gauthier, Université de Montréal
B. Lachapelle, Université de Montréal
P. Robert, Université de Montréal
J. Lambek, McGill University
B.A. Rattray, McGill University
S. Melamed, McGill University
A. Goldrich, McGill University
A. Teitlebaum, McGill University

Premier prix - $100.00

Labelle, Gilbert - Collège de Longueil, Longueil

Deuxième prix - $50.00

Doubilet, Susan - Northmount High School, Montréal

Bourses d'études, Sun Life - $250.00 (chacune)

Cox, David - Saint John's High School, Saint-Jean
Dainow, Ernest - Monklands High School, Montréal
Doubilet, Susan - Northmount High School, Montréal
Hariton, George - Westmount High School, Westmount
Labelle, Gilbert - Collège de Longueil, Longueil
Paquin, René - Séminaire de Sainte-Thérèse, Sainte-Thérèse

Prix provinciaux et régionaux - $25.00 (chacun)

Angel, Leonard - Herzliah High School, Montréal
Anstead, Christopher John - Malcolm Campbell High School, Mtl.
Cliche, Pierre - Académie de la Salle, Trois Rivières
Coleman, A.B. - Lower Canada College, Montréal
Cox, David - Saint John's High School, Saint-Jean
Daigle, Claude - Ecole Saint-Fréderic, Drummondville
Dainow, Ernest - Monklands High School, Montréal
Glouberman, Mark - Herzliah High School, Montréal
Hariton, George - Westmount High School, Westmount
Hawkins, Bob - Beaconsfield High School, Montréal
Lachapelle, Réjean - Ecole secondaire Meilleur, Montréal
Lemonnier, Godefroy - Mont-Saint-Louis, Montréal
Paquin, René - Séminaire de Sainte-Thérèse, Sainte-Thérèse
Pellerin, Jean-Luc - Ecole secondaire Immaculée-Conception, Shawinigan
Pickup, John - Quebec High School, Quebec City
Rosenfeld, Steven - Outremont High School, Montréal

Rothschild, John - Northmount High School, Montréal
Simard, Guy - Ecole secondaire Champagnat, La Tuque
Stein, Zalmen - Rabbinical College of Canada, Montréal
Szmuk, Peter - Northmount High School, Montréal
Tait, John - Lower Canada College, Montréal
Trudel, Jean - Ecole secondaire Immaculée-Conception,Shawinigan
Weldon, John - Montreal West High School, Montreal West
Zuker, Richard - Northmount High School, Montréal

Mentions honorables

Abolash, Emil - High School of Montreal, Montréal
Altrows, Irwin - Outremont High School, Montréal
Ayles, Peter - Baie Comeau High School, Baie Comeau
Bimson, Norman - Verdun Catholic High School, Verdun
Bonnier, Alain - Mont-Saint-Louis, Montréal
Brydges, James - Loyola College High School, Montréal
Cherry, Edward - Baron Byng High School, Montréal
Cohen, Soly - Mount Royal High School, Montréal
Collins, Edward - Loyola College High School, Montréal
Duchesne, Carol - Ecole secondaire Langevin, Rimouski
Dusseault, Bernard - Collège Notre-Dame, Montréal
Gagnon, Claude - Institut de technologie Laval, Montréal
Gagnon, Roger - Collège Ste Croix, Montréal
Godwin, Charles - Lower Canada College, Montréal
Gougeon, Francis - Cardinal Newman High School, Montréal
Greenblatt, Jack - Outremont High School, Montréal
Keller, Neil - Monklands High School, Montréal
Leblanc, Richard - Ecole secondaire Notre-Dame-de-Grâce, Quebec City
McCallum, James - Beaconsfield High School, Montréal
Silver, Myron - Mount Royal High School, Montréal
Singer, Robert - Northmount High School, Montréal
Tellier, Guy - Ecole secondaire Sacré-Coeur, Sorel
Wong, Brian - Rosemount High School, Montréal.

## QUESTIONNAIRE

Les candidats ne doivent pas répondre à plus de neuf (9) questions: trois (3) de la partie A, trois (3) de la partie B et trois (3) de la partie C.

### PARTIE A

Choisir trois (3) questions de la partie A.

1. (a) Simplifier: $\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$.

   (b) Les côtés d'un triangle rectangle ont pour longueur $\dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$ et $\dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ respectivement, montrer que la longueur de l'hypoténuse est constante.

2. On considère le système:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ mx + (m-1)y &> 2 \end{aligned}$$

   où m est un paramètre.
   Exprimer en fonction de m les solutions du système.

3. Soit ABC un triangle et A′, B′, C′, des points sur BC, CA et AB respectivement. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AB′C′, BC′A′ et CA′B′ passent par un point commun.

4. Si un nombre entier n'est pas divisible par 2 ni par 3, alors son carré est un multiple de 24, augmenté d'une unité; par exemple, $7^2 = 2 \times 24 + 1$. Pourquoi en est-il ainsi ?

### PARTIE B

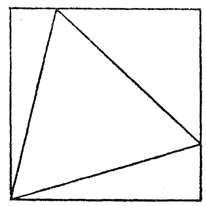
Choisir trois (3) questions de la partie B.

5. On considère deux axes perpendiculaires OX et OY; sur OX, un point T tel que OT = 3r; et un cercle (C) de centre A, de rayon r et tangent en T à OX.
   Où peut-on prendre le point I sur OX de telle sorte que le cercle de centre I, tangent à OY, coupe le cercle (C) ?

6. (a) Trouver les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est 2p et l'aire est $a^2$.

   (b) Quelles conditions doivent satisfaire les nombres p et $a^2$ pour que le problème admette des solutions.

7. La figure ci-dessous représente un triangle équilatéral inscrit dans un carré de côté égal à 1. Trouver la surface du triangle.



8. Trouver tous les nombres entiers positifs x, y, z tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ soit un nombre entier.

## PARTIE C

Choisir trois (3) questions de la partie C.

9. La suite des nombres 2, 3, 7, 43, ........ est ainsi formée: chaque terme est le produit des termes précédents augmenté de 1. Ainsi $43 = 2 \times 3 \times 7 + 1$.

   (a) Si $u$ désigne le n–ième terme, montrer que

   $$U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1.$$

   (b) Remarquant que: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = 1 - \frac{1}{42}$,

   généraliser ce résultat et justifier votre généralisation.

10. Soit ABC un triangle et O un point dans son plan. On désigne par A′, B′, C′ les pieds des perpendiculaires, issues de O, aux côtés BC, CA, AB respectivement. On désigne par A″, B″, C″ les symétriques de A′, B′, C′, respectivement, par rapport aux milieux des côtés correspondants. Montrer que les perpendiculaires à ces côtés, issues de A″, B″ et C″ sont concourantes.

11. Soit abc un nombre formé de trois chiffres a, b, c. Si I(abc) désigne le nombre obtenu en inversant le premier et le troisième chiffre (c'est-à-dire I(abc) = cba), montrer que l'expression

    $$[abc - I(abc)] + I[abc - I(abc)]$$

    est constante pour tout nombre abc tel que $a > c + 1$.

12. (a) Combien de fois en 12 heures les deux aiguilles d'une horloge sont-elles superposées ? (Ne comptez 12 heures qu'une fois).

    (b) Si les deux aiguilles étaient identiques, combien de fois en 12 heures l'heure lue sur l'horloge serait-elle ambiguë ?

SOLUTIONNAIRE

PARTIE A

1. (a) $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{(a-b)^2}{\frac{a-b}{ab}} = ab(a-b)$$

(b) Soit $m \neq 0$ et $m \geq n \geq 0$, soit L la longueur de l'hypoténuse

$$L^2 = \frac{(2mn)^2}{(m^2+n^2)^2} + \frac{(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{m^4+n^4+2m^2n^2}{(m^2+n^2)^2} = \frac{(m^2+n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} = 1$$

d'où $L = 1$ toujours.

2. $2x - 3y = 5$ et $mx + (m-1)y > 2$ .

De l'équation, on obtient $x = \frac{3y+5}{2}$ .

D'où $m\left(\frac{3y+5}{2}\right) + (m-1)y > 2$, d'où $(5m-2)y > 4 - 5m$

(a) Si $m > 2/5$, alors la solution sera donnée par $y > \frac{4-5m}{5m-2}$ et

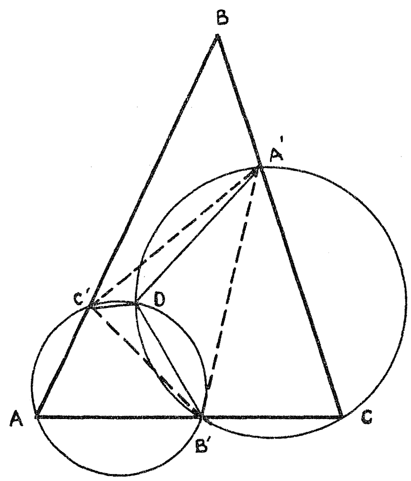
$$x = \frac{3y+5}{2}$$

(b) Si $m < 2/5$, alors la solution sera donnée par $y < \frac{4-5m}{5m-2}$ et

$$x = \frac{3y+5}{2}$$

(c) Si $m = 2/5$, alors le système n'a pas de solution.

3.




Les cercles circonscrits à CA'B' et AB'C' se rencontrent en B' et en un autre point D. Nous allons montrer que le cercle circonscrit à BA'C' passe par le point D. Pour cela, il suffit de montrer que le quadrilatère BA'DC' est inscriptible; alors le cercle dans lequel il est inscrit est circonscrit à BA'C'.

$A'CB' + A'DB' = 180^o$
$C'AB' + C'DB' = 180^o$
$A'DC' + A'DB' + B'DC' = 360^o$

De ces trois équations, on obtient
$A'DC' + (180^o - A'CB') + (180^o - C'AB') = 360^o$

$A'DC' = A'CB' + C'AB'$ .

La somme des angles intérieurs d'un triangle étant $180^o$
$A'DC' = 180^o - A'BC'$

D'où $A'DC' + A'BC' = 180^o$ , d'où le quadrilatère BA'DC' est inscriptible.

4. Un entier n peut s'exprimer sous la forme $n = 6k + r$ où $0 \leq r < 6$.

Si n n'est divisible ni par 2 ni par 3, alors il faut que $r = 1$ ou $r = 5$.

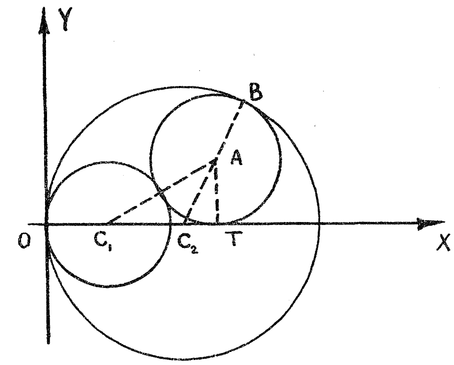
Dans le cas $r = 1$, nous avons $n^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1$. Mais k est pair ou impair, i.e. $k = 2m$ ou $k = 2m + 1$. Dans le premier cas

$$n^2 = 4 \times 36m^2 + 24m + 1$$
$$= 24(6m^2 + m) + 1 \quad .$$

Dans le second cas
$$n^2 = 12k(3k + 1) + 1$$
$$= 12(2m + 1)(6m + 4) + 1$$
$$= 24(2m + 1)(3m + 2) + 1$$

PARTIE B

5.




Soit $C_1$ (sur OX), le centre du cercle qui est tangent extérieurement au cercle de centre A et tangent à OY. Soit $C_2$ (sur OX), le centre du cercle qui est tangent intérieurement au cercle de centre A et tangent à OY.
Soient $R_1$ et $R_2$, les rayons respectifs; nous avons alors

$(C_1A)^2 = (AT)^2 + (TC_1)^2$

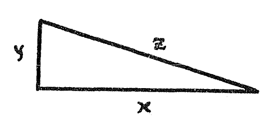
$(R_1 + r)^2 = r^2 + (3r - R_1)^2$ pour le cercle extérieur, et :

$(C_2A)^2 = (AT)^2 + (TC_2)^2$

$(R_2 - r)^2 = r^2 + (3r - R_2)^2$ pour le cercle intérieur. De ceci on obtient directement (a) $R_1 = \frac{9r}{8}$ (b) $R_2 = \frac{9r}{4}$

D'où $\frac{9r}{8} \leqslant OI \leqslant \frac{9r}{4}$

6.




Soient x et y les côtés de l'angle droit; soit z, l'hypoténuse.
On a: $x + y + z = 2p$ (1)

$xy = 2a^2$ (2)

$x^2 + y^2 = z^2$ (3)

De (1), on tire: $x + y = 2p - z$

En élévant au carré: $x^2 + y^2 + 2xy = 4p^2 - 4pz + z^2$ (4)

De (2), (3), et (4), on déduit: $z^2 + 4a^2 = 4p^2 - 4pz + z^2$

D'où $z = \frac{p^2 - a^2}{p}$ (5)

On a évidemment $p > 0$ ; pour que z soit $> 0$, il faut $p^2 > a^2$ .

Comme $x + y = 2p - z$, on a: $x + y = 2p - \frac{p^2 - a^2}{p} = \frac{p^2 + a^2}{p}$ (6)

On a donc, en mettant en regard (2) et (6): $x + y = \frac{p^2 + a^2}{p}$

$$xy = 2a^2$$

Les nombres x et y sont donc les racines de l'équation

$$x^2 - \frac{p^2 + a^2}{p} x + 2a^2 = 0 \qquad (7)$$

(7) aura des racines réelles positives si

$$\left(\frac{p^2 + a^2}{p}\right)^2 - 8a^2 \geqslant 0 \qquad (8)$$

$$2a^2 > 0 \qquad (9)$$

$$\frac{p^2 + a^2}{p} > 0 \qquad (10)$$

(9) et (10) sont toujours réalisées car $p > 0$, évidemment.

La condition (8) se ramène à: $p^4 - 6a^2p^2 + a^4 > 0$ (11)

Or les racines de $p^4 - 6a^2p^2 + a^4 = 0$

sont $p^2 = a^2(3 - 2\sqrt{2})$ et $p^2 = a^2(3 + 2\sqrt{2})$

Donc (11) sera vérifiée pour: $p^2 \geqslant a^2(3 + 2\sqrt{2})$ (12)

$$p^2 \geqslant a^2(3 - 2\sqrt{2}) \qquad (13)$$

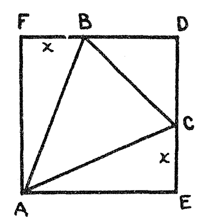
(13) est incompatible avec la condition $p^2 > a^2$ . Il reste la condition (12) qui comprend toutes les conditions précédemment posées.
Les nombres x et y sont donc les solutions de (7):

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{1}{p}\left[ p^2 + a^2 \pm \sqrt{p^4 - 6a^2p^2 + a^4} \right];$$

$$z = \frac{p^2 - a^2}{p}$$

Et x, y, z, sont réels et positifs pourvu que $p^2 \geqslant a^2(3 + 2\sqrt{2})$

7.




Par le théorème de Pythagore
$FB = CE = x$, alors $BD = DC = 1-x$ .

Par le théorème de Pythagore

$$\overline{BC}^2 = (1 - x)^2 + (1 - x)^2$$

$$= 2 - 4x + 2x^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + x^2$$

Puisque $BC = AC$ , $1 + x^2 = 2 - 4x + 2x^2$ ; $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Comme $0 < x < 1$ , nous avons $x = 2 - \sqrt{3}$

Aire de ACE = aire de AFB = $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}$

Aire de BDC $= \dfrac{(1 - x)(1 - x)}{2} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

La somme des aires de ces trois triangles est $4 - 2\sqrt{3}$

Aire de ABC $= 1 - (4 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$ .

8. Soit $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = n$ où x, y, z et n sont des entiers. Comme la valeur maximum de chaque terme est 1, la valeur maximum de n est 3. Les valeurs possibles de n sont donc $n = 1, 2$, ou 3.

(a) Soit $n = 3$, alors chaque terme doit avoir sa valeur maximum i.e. $x = y = z = 1$.

(b) Soit $n = 2$. Si $x = y = z$, alors $x = \frac{3}{2}$ qui n'est pas un entier.

Au moins un terme doit être plus grand que $\frac{2}{3}$, soit $\frac{1}{x}$ , mais alors $\frac{1}{x} = 1$ d'où $x = 1$

Considérons maintenant l'équation $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ si $y = z$, alors $y = z = 2$.

Si $y \neq z$, alors un terme doit être plus grand que $\frac{1}{2}$ , soit $\frac{1}{y}$ , mais alors $\frac{1}{y} = 1$ d'où $\frac{1}{z} = 0$, ce qui est impossible.

(c) Soit $n = 1$. Si $x = y = z$, alors chaque terme est $\frac{1}{3}$ et $x = y = z = 3$. Autrement, un terme, soit $\frac{1}{x}$, doit être plus grand que $\frac{1}{3}$. Alors $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{x} = 1$.

Dans le second cas, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, ce qui est impossible. Dans le premier cas, on doit avoir $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

Considérons l'équation $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Si $y = z$, alors $y = z = 4$

Si $y \neq z$, alors un terme, soit $\frac{1}{y}$, doit être plus grand que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{y} = 1$, $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$. Les deux premiers cas sont facilement exclus, on doit donc avoir $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ et alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$.

Nous obtenons donc les solutions suivantes:

| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| (a) | 1 | 1 | 1 |
| (b) | 1 | 2 | 2 |
| (c) | 3 | 3 | 3 |
| | 2 | 4 | 4 |
| | 2 | 3 | 6 |

Les permutations de ces solutions donnent toutes les solutions possibles.

## PARTIE C

9. (a) La suite est déterminée par les deux premiers termes, 2 et 3, et par la loi

$$U_{n+1} = 2 \times 3 \times \cdots \times U_{n-1} \times U_n + 1.$$

Par la même loi, on peut écrire

$$U_n = 2 \times 3 \times \cdots \times U_{n-1} + 1 \quad \text{ou encore}$$

$$U_n - 1 = 2 \times 3 \times \cdots \times U_{n-1}$$

D'où on obtient

$$U_{n+1} = (U_n - 1)\, U_n + 1 = U_n^2 - U_n + 1$$

(b) La loi générale est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{U_n} = 1 - \frac{1}{U_{n+1} - 1}$$

Nous allons prouver ceci par induction sur n.

Pour $n = 1$ l'énoncé est $\frac{1}{U_1} = 1 - \frac{1}{U_2 - 1}$

Mais ceci est $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3 - 1}$ i.e. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

La loi est donc valide pour $n = 1$. Supposons maintenant que la loi est valide pour n.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{U_n} = 1 - \frac{1}{U_{n+1} - 1}$$

Ajoutons de chaque côté $\frac{1}{U_{n+1}}$, nous obtenons alors

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{U_{n+1} - 1} + \frac{1}{U_{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{U_{n+1} - (U_{n+1} - 1)}{U_{n+1}\,(U_{n+1} - 1)}$$

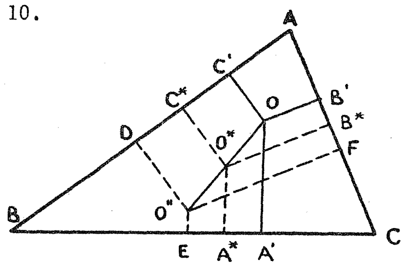
$$= 1 - \frac{1}{U_{n+1}{}^2 - U_{n+1}}$$

En utilisant la relation obtenue en (a)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{U_{n+2} - 1}$$

Ce qui complète la preuve.

10.




Soit le triangle quelconque ABC et un point O quelconque dans le plan de ce triangle. De O, abaissons sur les côtés du triangle les perpendiculaires OA', OB' OC' comme le demande le problème.

Soient A*, B*, C*, les milieux des côtés du triangle, et construisons les médiatrices de ces côtés. On sait qu'elles se rencontrent en un point que nous désignerons par O*.

Joignons OO* et prolongeons jusqu'en O" de façon que OO* = O*O" .
O" est donc le symétrique de O par rapport à O*.
De O" menons O"D perpendiculaire au côté AB du triangle ABC.
Nous allons montrer que DC* = C*C' .
En effet DO", C*O*, C'O sont parallèles entre elles.

Donc $\dfrac{O''O^*}{O^*O} = \dfrac{DC^*}{C^*C'}$ Comme $O''O^* = O^*O$

$$DC^* = C^*C'$$

et le point D n'est autre que le point C" de l'énoncé du problème.
De la même manière, on montrerait que le pied E de la perpendiculaire abaissée de O" sur BC n'est autre que le point A". Il en va de même du pied F de la perpendiculaire abaissée de O" sur AC. Le point F n'est autre que le point B". Donc, les perpendiculaires aux côtés du triangle, issues de A", B", et C", sont concourantes. Elles passent toutes par O".

11. $abc = a100 + b10 + c$

$$abc - I(abc) = a100 + b10 + c - (c100 + b10 + a)$$

$$= (a - c)100 + (c - a)$$

Mais $c - a$ est négatif. Comme $a - c \geqslant 2$, nous pouvons écrire

$$abc - I(abc) = (a - c - 1)100 + 9.10 + [10 + (c - a)]$$

où $0 \leqslant 10 + (c - a) \leqslant 9$

$$I\ [abc - I(abc)] = [10 + (c - a)]\ 100 + 9.10 + a - c - 1$$

Mais alors: $abc - I(abc) + I\ [abc - I(abc)] = 9.100 + 18.10 + 9$

$$= 1089$$

12. (a) Soit $\Theta$ l'angle parcouru par la petite aiguille à partir de midi. La grande parcourt alors $12\ \Theta$ . Les aiguilles sont superposées lorsque

$\Theta + k360^o = 12\ \Theta$ où $0^o \leqslant \Theta < 360^o$ et k est un entier.

$$11\Theta = k360^\circ \quad \text{d'où} \quad 0^\circ \leqslant \Theta = \frac{k360^\circ}{11} < 360^\circ$$

d'où $k = 0, 1, 2, ---, 10$.

Les deux aiguilles sont superposées 11 fois.

(b) Soit la petite aiguille en $\Theta$ et la grande en $12\,\Theta$. Si on change les aiguilles, la petite sera en $12\,\Theta$ et la grande en $144\,\Theta$. Si ces configurations sont les mêmes, nous aurons $\Theta + k360^\circ = 144\Theta$ où k est un entier et $0^\circ < \Theta < 360^\circ$.
$143\,\Theta = k360^\circ$

$$0 \leqslant \Theta = \frac{k}{143}\,360^\circ < 360^\circ \qquad \text{d'où} \quad k = 0, 1, 2, ---, 142.$$

Parmi ces 143 configurations, chaque fois que les aiguilles sont superposées, le temps n'est pas ambigu. Le temps sera ambigu 143 - 11 = 132 fois.