LES NOMBRES DE LIOUVILLE

Pierre-Yves LEDUC

(Texte d'un séminaire donné par P.Y.Leduc à l'Université de Montréal en 1960.)

Avant de parler des nombres de Liouville, nous retracerons les principales difficultés motivant la construction de l'ensemble complet des nombres réels.

Supposons d'abord que nous ne disposions que de l'ensemble des nombres rationnels (*), comme nous allons voir, nous devenons immédiatement limités de toutes parts. La notion de nombre rationnel est d'ailleurs très ancienne, et les Grecs eurent tôt fait de les trouver insuffisants.

QUELQUES NOMBRES NON-RATIONNELS

Il est connu depuis longtemps que certaines "opérations" ne conservent pas la rationalité des nombres; les disciples de Pythagore avaient déjà prouvé l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$: on sait très bien que ceci se généralise au fait que si $\sqrt[n]{N}$ n'est pas un entier, c'est un irrationnel.

Mentionnons, à titre de second exemple, que le logarithme à base 10 de tout nombre qui n'est pas une puissance de 10 est nécessairement irrationnel : par exemple supposons que

$$\log_{10} 2 = \frac{a}{b} \quad \text{a et b entiers, } b \neq o$$

alors par définition de la fonction logarithme :

$$10^{a/b} = 2 \quad \text{d'où} \quad 10^a = 2^b$$

ce qui contredit le théorème d'unicité de la décomposition des entiers en produit de puissances de nombres premiers.

Enfin nous savons que des nombres aussi importants que π et e (**) sont irrationnels; convaincons-nous dès maintenant de l'irrationalité de e:

Supposons $e = \frac{a}{b}$ et considérons le nombre α défini par

(*) C'est-à-dire des nombres de la forme $\frac{a}{b}$, a et b entiers et $b \neq o$.

(**) Comme définition de e, prenons la série $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

$$\alpha = k! \left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{k!} \right)$$

Si $k \geqslant b$, alors la parenthèse peut se mettre sur le même dénominateur $k!$ et la simplification des $k!$ montre le caractère entier de α.

D'autre part α est positif car c'est

$$\alpha = k! \left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots + \frac{1}{(k+n)!} \dots \right)$$

On a donc

$$0 < \alpha = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+1)\dots(k+n)} + \dots$$

$$0 < \alpha < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^n} + \dots = \frac{\frac{1}{k+1}}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k}$$

contredisant le fait que α est entier.

LES NOMBRES ALGÉBRIQUES

Il est assez naturel de penser à une sorte de hiérarchie des nombres irrationnels; par exemple, n'est-ce-pas que $\sqrt{2}$ est "plus irrationnel" que $\sqrt{2}$, lequel est "plus irrationnel" que 2 lui-même ?

On peut donc penser à classifier les nombres d'après leur "degré d'irrationalité"; par suite on dira

Définition - Un nombre ξ est dit algébrique de degré n, si n est le plus petit entier positif tel que ξ soit solution d'une équation du type

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

où les a_i sont entiers et $a_0 \neq 0$.

On voit immédiatement que les rationnels sont tout simplement des algébriques de degré 1 et qu'en somme la notion de nombre algébrique est la généralisation la plus naturelle de celle de nombre rationnel.

COMBIEN Y A-T-IL DE NOMBRES ?

On sait depuis longtemps que les rationnels sont dénombrables et on peut maintenant se poser la question : les nombres algébriques sont-ils aussi dénombrables ? Pour y répondre, considérons le nombre h défini par

$$h = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| + n \,, \quad a_i \text{ entiers;}$$

On voit qu'il y a un nombre fini de polynômes entiers en x correspondant à un h fixé; mais on sait qu'à chacun de ces polynômes correspond un nombre fini (au plus n) de racines réelles. D'où il est clair qu'à un h fixé correspond un nombre fini de nombres algébriques. Si on fait ceci avec $h = 2$, $h = 3$, $h = 4$, etc. on aura une énumération des nombres algébriques. Donc les nombres algébriques sont dénombrables; les réels le sont-ils aussi ? Evidemment non! Et voici deux façons différentes de le prouver.

I. Supposons l'existence d'une énumération des réels dont voici une représentation décimale :

$$\begin{array}{l}
x_1 = a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \dots \\
x_2 = a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \dots \\
x_3 = a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \dots \\
x_4 = a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \dots \\
\vdots
\end{array} \qquad 0 \leqslant a_{ij} < 10 \quad \text{pour tout } a_{ij}$$

Soit $\xi = c_1 c_2 c_3 \dots$ défini par $c_n \neq a_{nn}$ pour tout n ; alors évidemment cette énumération ne contient pas ξ et la conclusion s'ensuit.

II. Soit (a_0, b_0) un intervalle et $(x_1, x_2, \dots)$ une énumération de cet intervalle.

Divisons l'intervalle (x_1, b_0) en trois parties égales et soit (a_1, b_1) l'intervalle du milieu : on a

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_0 \quad \text{et} \quad x_1 \notin (a_1, b_1)$$

1) Si $x_2 \notin (a_1, b_1)$ divisons (a_1, b_1) en trois parties égales, et soit (a_2, b_2) l'intervalle du milieu.

2) Si $x_2 \in (a_1, b_1)$ divisons (x_2, b_1) en trois parties égales et soit (a_2, b_2) l'intervalle du milieu :

On a $< a_0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 \quad b_0$ et $x_2 \notin (a_2, b_2)$

et ainsi de suite, on construira une suite d'intervalles emboités (a_n , b_n) tels que pour tout n, $x_n \notin (a_n, b_n)$.

Soit $\xi = \sup a_n$; alors $\xi \varepsilon (a_n, b_n)$ pour tout n et par suite, cette énumération ne contient pas ξ et la conclusion s'ensuit.

On en conclut donc qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas algébriques : ce raisonnement est essentiellement celui de Cantor sur l'existence de ces nombres dits transcendants. Evidemment ce raisonnement est rigoureusement correct. Nous aurions pu cependant procéder autrement en choisissant un nombre tel que π, et en démontrant qu'il est transcendant; alors nous aurions eu non seulement une preuve d'existence, mais aussi au moins un exemple concret de ces nombres. Liouville a fait encore mieux : son théorème qui est un critère sur l'algèbricité des nombres, permet une méthode effective de construire des nombres transcendants.

Introduisons d'abord la notion d'ordre d'approximation.

On sait que tout nombre réel peut être approché arbitrairement par un rationnel car tout nombre réel est limite d'une suite de Cauchy de rationnels.

En ce qui concerne la question d'ordre d'approximation, on est surtout intéressé à savoir avec quelle vitesse une certaine suite de rationnels converge vers un réel; étant donné un réel et une de ses approximations rationnelles, peut-on prévoir d'après la seule structure de ces deux nombres, de combien ils sont différents ?

Voici un exemple, disons

<u>Théorème I</u> : Etant donné un nombre réel fixe α et un entier arbitraire m, il existe un entier n tel que

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m} \qquad (1)$$

Essayons $\alpha = 3$ et $m = 4$. Si on pense à la suite $\frac{n}{4}$, il est clair que $\left| 3 - \frac{7}{4} \right| < \frac{1}{4}$;cet exemple nous convainc au fond de l'évidence de ce théorème. Ce qui serait intéressant, ce serait d'améliorer l'inégalité (1). Une amélioration immédiate est

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{2m}$$

Mais avant d'aller plus loin, pour des raisons de commodité, changeons un peu l'énoncé du Théorème I, en ceci :

<u>Théorème I</u> : Etant donné un nombre réel fixé α , il existe une infinité de solutions (n,m) à

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m}$$

On pourrait maintenant démontrer l'amélioration suivante qui vaut pour un α irrationnel : l'inégalité $\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m^2}$ ou encore mieux l'inégalité $\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m^2\sqrt{5}}$ possède une infinité de solutions; c'est d'ailleurs la "meilleure" inégalité qui tienne pour tous les irrationnels sans exception; si on essaie de faire mieux, on trouvera toujours un irrationnel α pour lequel elle n'aura qu'un nombre fini de solutions : par exemple l'inégalité $\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m^2\sqrt{8}}$ tient pour tous les irrationnels à l'exception de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, le nombre d'or. La preuve de ceci est compliquée; une remarque amusante est que le développement de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ en fraction continue est le plus simple qui soit :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots}}}}}$$

Si d'autre part, on restreint le domaine de variation de α , on devra s'attendre à des inégalités plus fortes que celles que nous venons de voir; on pourrait par exemple parler de l'ensemble des nombres α tels que

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m^k}$$

possède tant de solutions, et ainsi de suite. On dira d'ailleurs

<u>Définition</u> Un nombre α est approximable à l'ordre k s'il existe une constante R dépendant de α seulement, telle que

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{R}{m^k}$$

possède une infinité de solutions.

Démontrons maintenant le théorème de Liouville.

<u>Théorème II</u> : Un nombre réel algébrique α de degré n n'est pas approximable à un ordre plus grand que n.

<u>Preuve</u> : par hypothèse, α satisfait

$$f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

où les a_i sont entiers et $a_0 \neq 0$.

Soit $\frac{p}{q}$ une approximation de α différente de α et telle que :

1) $q > 0$

2) $\frac{p}{q} \varepsilon (\alpha-1, \alpha+1)$ et $\frac{p}{q}$ plus proche de α que de toute autre racine de $f(x)$.

On a alors $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ et par suite,

$$\left|f(\tfrac{p}{q})\right| = \left|a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_n\right|$$

$$= \left|\frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_n q^n}{q^n}\right|$$

et comme le numérateur est un entier, et que $f(\frac{p}{q}) \neq 0$,

$$\left|f(\tfrac{p}{q})\right| > \frac{1}{q^n} \qquad (1)$$

D'autre part :

$f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q}) - f(\alpha) = (\frac{p}{q} - \alpha)\, f'(\bar{x})$ où $\bar{x}$ est entre $\frac{p}{q}$ et α ;

mais si $M > |f'(x)|$ dans $(\alpha-1, \alpha+1)$ on aura certainement :

$$\left|f(\tfrac{p}{q})\right| < \left|\tfrac{p}{q} - \alpha\right| M \qquad (2)$$

De (1) et (2), on tire

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{Mq^n}$$

Supposons maintenant l'inégalité

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{R}{q^{n+1}} \qquad (3)$$

on devra avoir : $\frac{1}{Mq^n} < \frac{R}{q^{n+1}}$ donc $q < M R$;

mais si q est ainsi borné, (3) ne peut pas avoir une infinité de solutions, ce qui termine la preuve.

<u>Corollaire</u> : Le nombre ξ défini par :

$$\xi = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots$$

est un nombre transcendant.

<u>Preuve:</u> Soit ξ_n la somme des n premiers termes de la série définissant ξ, $\xi_n = \frac{p}{10^{n!}} = \frac{p}{q}$, disons;alors

$$0 < \xi - \frac{p}{q} = \xi - \xi_n = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+2)!}} + \cdots < \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

c'est-à-dire

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

Fixons-nous un N; alors, pour tout $n > N$, on aura

$\frac{2}{10^{(n+1)!}} < \frac{2}{10^{n!N}}$ car $(n+1)! > n!N$ mais

$\frac{2}{10^{n!N}} = \frac{2}{q^n}$ et il est alors clair que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{q^N}$$

possède une infinité de solutions; N étant arbitraire, la conclusion s'ensuit.

<u>Remarque:</u> Ce résultat se généralise facilement aux nombres ξ définis par :

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r^{k!}}$$

où r est entier, $r > 0$ et $1 \leqslant a_k < r$ pour tout a_k.
Ce sont justement les nombres de Liouville.