PROBLÈMES ET SOLUTIONS DU CONCOURS MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC MAI 1961.

Les candidats ne doivent pas répondre à plus de neuf (9) questions: trois (3) de la partie A, trois (3) de la partie B et trois (3) de la partie C.

PARTIE A

Choisir trois (3) questions de la partie A.

1. Simplifier: $(a^2 + b^2)\ (a^{-2} + b^{-2})^{-1}$.

2. Etant donnés deux points distincts A et B, montrer comment on peut construire, à l'aide du compas seulement (sans règle), un troisième point C sur la droite AB.

3. Un étudiant achète 9 crayons à x cents pièce, 3 plumes à y cents pièce, où x et y sont des entiers, et quelques cahiers à 60 cents pièce. Le commis lui demande deux dollars et trente cents. L'étudiant lui fait remarquer qu'il doit y avoir une erreur. Justifier la remarque de l'étudiant.

4. Soit A un cercle de rayon r. Quel est le nombre maximum de cercles tangents extérieurement à A, dont les rayons sont r et tels que deux quelconques d'entre eux n'ont aucun point intérieur commun? Justifier votre réponse.

PARTIE B

Choisir trois (3) questions de la partie B.

5. (a) Démontrer que le produit de deux nombres positifs est égal ou inférieur à 1, si leur somme est égale à 2.

   (b) Démontrer que le carré d'un nombre impair est égal à un multiple de 8 plus 1.

6. Démontrer que $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

7. Soient M et N deux villes. Une voiture A part de M pour aller à N, en même temps qu'une voiture B part de N pour aller à M. Les voitures voyagent à une vitesse constante. Lorsque les voitures se rencontrent, A a parcouru 60 milles de plus que B. A partir du point de rencontre A met 4 heures pour se rendre à N et B met 9 heures pour se rendre à M. Trouver la distance entre les villes M et N et les vitesses de A et de B.

8. Prouver que si un quadrilatère ABCD est tel qu'un cercle découpe sur ses côtés quatre cordes égales, alors les sommes des longueurs des côtés opposés sont égales, c'est-à-dire AB + CD = AD + BC .

PARTIE C

Choisir trois (3) questions de la partie C.

9. Si n et d sont des entiers positifs, d est dit un diviseur de n si $\frac{n}{d}$ est un entier; par exemple, les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Montrer que n a un nombre impair de diviseurs si et seulement si n est un carré parfait.

10. Si on définit $x \circ y = x + y$, alors les propositions suivantes sont valides:

    (a) pour tout x et tout y, $x \circ y = y \circ x$.
    (b) pour tout x, tout y et tout z, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.
    (c) Il existe un élément x tel que pour tout y, $x \circ y = y$.

    Montrer lesquelles des propositions précédentes demeurent valides, si on définit $x \circ y = 1 + xy$, si on définit $x \circ y = x + y + xy$. Discuter, s'il y a lieu, les modifications possibles de la proposition (c) qui la rendraient valide pour les nouvelles définitions.

11. Cinq points sont situés dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe au moins deux de ces points tels que leur distance soit inférieure ou égale à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

12. Trouver le dividende, le diviseur et le quotient de la division suivante:

```
- - - - - - -     | - -
- - -             |-----------
-----               - - 8 - -
0 0 0 - -
      - -
    -----
    0 - - -
        - -
        ---
        0 4
```

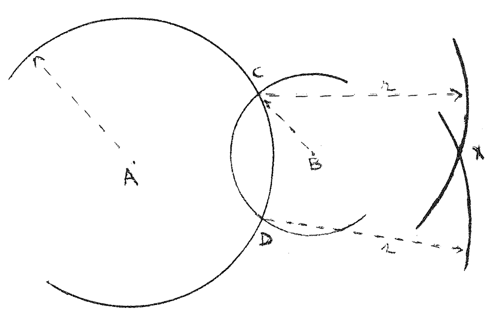
- SOLUTIONS ABRÈGÉES

- A -

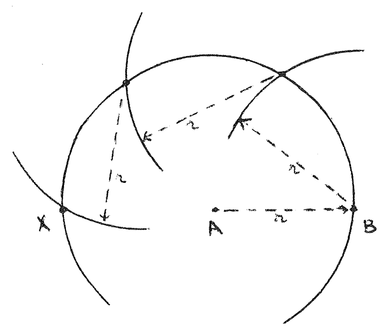
1. $$(a^2 + b^2)\ (a^{-2} + b^{-2})^{-1} = (a^2 + b^2)\ \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = a^2b^2$$

2. Deux des nombreuses solutions possibles:

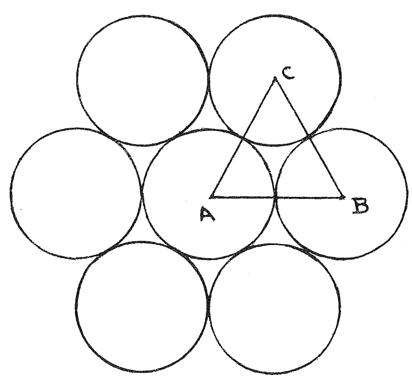
a)



b)



3. Le prix total en cents devait être un multiple de trois, or 230 ne l'est pas.



ABC est un triangle équilatéral. $\hat{A}$ est donc de 60° , d'où le nombre maximum de cercles est 6.

- B -

5\. a) Si le premier nombre est $1 + t$, alors le second nombre est $1 - t$. Le produit de ces nombres est $1 - t^2 \quad 1$.

b) $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$.

Comme $k(k + 1)$ est paire, $4k(k + 1)$ est un multiple de 8.

6\. $\sin 20 = \sin 160 = 2 \sin 80 \cos 80$

$= 4 \sin 40 \cos 40 \cos 80$

$= 8 \sin 20 \cos 20 \cos 40 \cos 80$.

Comme $8 \sin 20 = 0$, on peut simplifier. On obtient alors

$$1/8 = \cos 20 \cos 40 \cos 80 .$$

7\. Soient V_A la vitesse de A, V_B la vitesse de B, D la distance entre M et N et t le temps de rencontre (le temps de départ étant 0), alors:

a) $V_A t + V_B t = D$

b) $V_A t = V_B t + 60$

c) $V_A (t + 4) = D$

d) $V_B (t + 9) = D$.

Eliminons D entre a) et c) ,

e) $V_A t + V_B t = V_A t + 4V_A$; $V_B t = 4 V_A$

Eliminons D entre a) et d),

f) $V_A t = 9 V_B$

De e) et b) on obtient

g) $V_A t = 4 V_A + 60$; $V_A = \dfrac{60}{t - 4}$

De la même façon de f) et b), on obtient

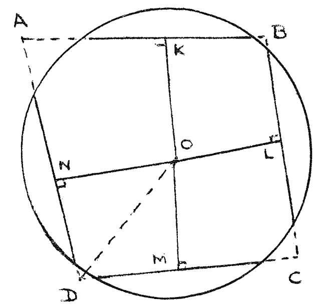
h) $V_B = \dfrac{60}{9 - t}$

En remplaçant par g) et h) dans b)

$$\frac{60 - t}{t - 4} = \frac{60\ t}{9 - t} + 60$$

d'où $t = 6$, $V_A = 30$, $V_B = 20$ et $D = 300$.

8.



OK = OL = OM = ON .

Par le théorème de Pythagore

$\triangle$ OND = $\triangle$ OMD d'où ND = DM

$\triangle$ OMC = $\triangle$ OLC d'où MC = CL

$\triangle$ OKB = $\triangle$ OLB d'où LB = KB

$\triangle$ OKA = $\triangle$ ONA d'où KA = AN

Par addition

AD + BC = AN + BL + ND + CL

AK + KB + DM + MC = AB + DC

- C -

9. Si n/d est un entier, alors n/(n/d) = d est aussi un entier.

Si d est un diviseur de n, alors n/d est aussi un diviseur de n. On peut donc grouper les diviseur de n par paires. Une paire contient un seul diviseur si et seulement si pour cette paire $n/d = d$, c'est-à-dire, si et seulement si $n = d^2$ est un carré parfait. Si le nombre de diviseurs de n est impair, c'est que pour un certain diviseur d $n/d = d$ et n est un carré parfait. Réciproquement si $n = d^2$ le nombre de diviseurs de n sera impair.

.0. 1) $x * y = 1 + xy$

a) $x * y = y * x$ puisque $1 + xy = 1 + yx$

b) $(x * y) * z = (1 + xy) * z = 1 + (1 + xy)\, z$

$= 1 + z + xyz$

$x * (y * z) \quad = x * (1 + yz$

$= 1 + x(1 + yz) = 1 + x + xyz$

si $x \neq z \qquad x * (y * z) \neq (x * y) \quad z$.

c) $1 + xy = y$. Si $y = 0$, alors quelque soit x, $1 + xy \neq 0$.

Il n'existe donc pas de x tel que pour tout y, $x * y = y$.

2) $x * y = x + y + xy$.

a) $x * y = y * x$ puisque $x + y + xy = y + x + yx$.

b) $x * (y * z) = x * (y + z + yz)$

$= x + (y + z + yz) + x\,(y + z + yz)$

$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz$

$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$

$= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)\, z$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

D'où $x * (y * z) = (x * y) * z$

c) $x + y + xy = y$

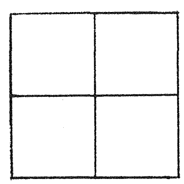
$x + xy = 0$

Si $x = 0$ alors pour tout y, $x * y = y$.

iii) Dans le premier cas une modification possible de la proposition serait: pour tout y = 0 il existe un x tel que x y = y . Dans ce cas le x en question serait $x = \frac{y - 1}{y}$.

Remarquer la différence dans l'ordre: il existe un x tel que pour tout y ... Pour tout y = 0, il existe un x ...

11.



Divisons le carré en quatre carrés égaux. Alors un des sous-carrés contient au moins deux points. Or la diagonale d'un sous-carré est
$$1/4 + 1/4 = \frac{2}{2}$$

12. a) Le premier chiffre du quotient fois le diviseur donne un nombre de 3 chiffres.

b) Le 2e chiffre du quotient est un 0 .

c) 8 fois le diviseur donne un nombre de 2 chiffres. De a) et c) on obtient: le premier chiffre du quotient est un 9 et le diviseur est 12. Le dividende commence donc par 1089 ...

d) le 4e chiffre du quotient est un 0 .

e) Comme le nombre de la 5e ligne est de la forme 0... et que l'on soustrait un nombre de 2 chiffres, il doit être de la forme 01.. donc le 5e chiffre du dividende est un 7.

f) Comme le reste final est 04 il faut que le dernier chiffre du quotient soit 8 et que les deux derniers chiffres du dividende soient 00.