Bibliothèque:

Les livres et périodiques achetés pour l'Anneau Mathématique restent la propriété du Collège, à l'usage des membres de la société. Des rayons, sous clé, sont installés à cet effet dans le local de l'Anneau. Seuls l'archiviste et l'aviseur sont autorisés à mettre une publication en circulation.

Visites-échanges:

S'il est possible, on pourra rendre visite à une société similaire et accepter de recevoir des visiteurs.

Participation aux Concours de Mathématiques:

L'Anneau Mathématique du Mont-Saint-Louis encouragera la participation annuelle des élèves aux différents concours organisés en mathématiques, en particulier à celui de la Société Mathématique du Canada. Pour les aider à mieux s'y préparer, on verra à organiser pour eux des cours spéciaux de perfectionnement.

- - - - - - - - - - - - - - - -

## NOTES ET PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Nous poursuivons, sous cette rubrique, la publication d'énoncés de problèmes proposés à des concours ou examens dans diverses régions du monde.

Certains des problèmes proposés à ces concours sont relativement faciles et leurs solutions sont sans intérêt particulier D'autres, toutefois, admettent des solutions diverses dont certaines peuvent être plus simples, plus élégantes et plus intéressantes que d'autres. Les numéros de ces problèmes sont précédés d'un "P" .

La direction serait très heureuse que ses lecteurs lui fassent parvenir leur solution de ces problèmes précédés d'un "P" . La solution jugée la meilleure, pour chaque problème, serait publiée sous la signature de son auteur; les noms de toutes les personnes ayant résolu un problème seraient également publiés.

Nous prions nos lecteurs de nous faire parvenir leurs solutions sous forme définitive et prête pour publication, et d'indiquer clairement le numéro du problème étudié. (Les problèmes que nous proposons sont numérotés de 59 à 81 pour faire suite au 58 problèmes que nous proposions dans l'émission précédente du Bulletin, sous cette même rubrique. Seules les solutions des problèmes précédés d'un "P" seront publiées).

## U.R.S.S.

## OLYMPIADES MATHÉMATIQUES DE ORDZONIKIDZE

## 1956

Chaque examen comporte cinq questions dont les suivantes:

GRADE 8: Première Ronde

59. Représenter graphiquement la fonction $y = \dfrac{1}{(x^2 - 4)}$.

'60. Etant donnés un cercle et deux rayons, construire une corde coupée en trois segments de même longueur par ces rayons.

GRADE 8: Deuxième Ronde

61. Quelles doivent être les valeurs de $p$ et $q$ pour que les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ satisfassent les deux équations:

$$x_1 - 2x_2 = 2 \qquad 2x_1 - 3x_2 = 5 \ ?$$

62. Evaluer la somme

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{99.100} .$$

GRADE 9: Première Ronde

63. Représenter graphiquement la fonction $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

'64. Evaluer la somme:

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111 \ldots 111}_{(n \text{ termes})} .$$

GRADE 9: Deuxième Ronde

65. Soient $a$, $b$ et $c$ trois termes consécutifs d'une progression arithmétique. Montrer qu'il en est de même des nombres

$$a^2 + ab + b^2, \quad b^2 + bc + c^2 \quad \text{et} \quad c^2 + ac + a^2 ..$$

P66. Montrer que (Log 2) (Log 5) $\doteqdot$ .2104, sans utiliser de tables pour déterminer les valeurs de Log 2 et Log 5 .

GRADE 10: Première Ronde

67. Par induction mathématique, prouver que

$$(1\,!)\,1 + (2\,!)\,2 + (3\,!)\,3 + \ldots + (n\,!)\,n = (n+1)\,! - 1 .$$

P68. Par le sommet A d'un triangle ABC construire la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, la médiane et la hauteur.
Montrer que, si ces trois droites divisent l'angle $\hat{A}$ en trois parties égales, l'angle $\hat{A}$ est droit.

GRADE 10: Deuxième Ronde

P69. Résoudre le système d'équations:

$$(x + y + z)\,(ax + y + z) = k^2 ,$$
$$(x + y + z)\,(x + ay + z) = \ell^2 ,$$
$$(x + y + z)\,(x + y \ az) = m^2 .$$

P70. Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction

$$y = 2\sin x - \cos 2x.$$

CHINE

1957

Deuxième Ronde (1 heure, 30 minutes).

p71. Trouver dix nombres naturels consécutifs qui soient tous des nombres non-premiers.

P72. Trouver une racine positive de l'équation suivante, et prouver qu'elle en est la seule racine positive:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}} .$$

73. Trouver les valeurs réelles de $x$ qui satisfont la relation suivante:

$$|3x - 2| + |3x + 1| = 3 .$$

P74. $D$ et $C$ sont deux points sur un demi-cercle de diamètre $AB$, et $X$ est un point quelconque de $AB$.
Prouver que

$$\operatorname{tg} \widehat{ACX} \cdot \operatorname{tg} \widehat{BDX} = \operatorname{tg} \widehat{BAC} \cdot \operatorname{tg} \widehat{ABD}.$$

P75. $V$-$ABC$ est un trièdre et $VD$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$.

Si $\widehat{AVD} \overset{<}{\underset{>}{=}} \frac{1}{2}\pi$, prouver que

$$\frac{1}{2}(\widehat{AVB} + \widehat{AVC}) \overset{\leq}{\underset{>}{=}} \widehat{AVD} .$$

P76. Montrer que dans un triangle le produit des longueurs des bissectrices est inférieur au produit des longueurs des côtés.

Troisième Ronde (1 heure, 30 minutes)

P77. Si le nombre naturel $62ab427$ est multiple de $99$, déterminer $a$ et $b$.

P78. On considère un rectangle $ABCD$ divisé en trois parties par les segments de droites $EF$ et $GH$, tel qu'indiqué sur la figure (1). Comment peut-on transformer cette division pour obtenir trois rectangles (fig. 2) dont les aires sont égales à celles des trois parties précédentes.

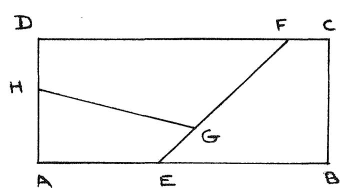


fig. (1)

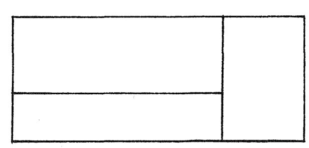


fig. (2)

P79. Etant donné l'entier $a$ plus grand que $2$ et l'entier composé $b$ $(b > 0)$, si $b$ est multiple de $r$ entiers positifs distincts, montrer que $a^b - 1$ admet au moins $r$ diviseurs entiers positifs distincts.

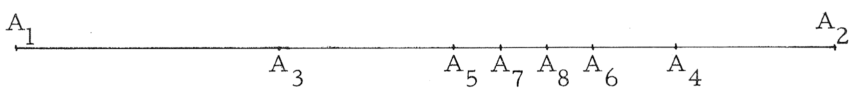
P80. Montrer que l'aire d'un polygone quelconque de $n$ côtés, inscrit dans un cercle de rayon unité, est inférieure à

$$\frac{1}{2}n \sin \frac{2}{n}\pi .$$

P81. On considère les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... sur une droite; $A_1A_2$ a pour longueur 1; $A_{n+2}$ est un point du segment

$$\overline{A_nA_{n+1}};\ \overline{A_nA_{n+2}} : \overline{A_{n+2}A_{n+1}} = \overline{A_{n+2}A_{n+1}} : \overline{A_{n+1}A_n} ,$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Prouver que la suite des longueurs $\overline{A_1A_2}$ , $\overline{A_2A_3}$ , $\overline{A_3A_4}$ , ... admet une limite et que cette limite est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ .




- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -